

А. Д. БРЮНО

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 10 XII 1973)

Нам придется иметь дело с формальными степенными рядами, которые могут быть как сходящимися, так и расходящимися. Арифметические операции, дифференцирование и подстановка ряда в ряд производятся над формальными рядами так же, как над сходящимися. Коэффициенты всех рассматриваемых рядов предполагаются комплексными числами. Пусть $\varphi_1(X), \dots, \varphi_n(X)$ — степенные ряды от $X=(x_1, \dots, x_n)$ без свободных членов, сходящиеся в некоторой окрестности точки $X=0$, и пусть в этой точке матрица $(\partial\varphi_i/\partial x_j)$ — жорданова с главной диагональю $\Lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Точка $X=0$ является неподвижным решением системы $dx_i/dt=\dot{x}_i=\varphi_i(X)$, $i=1, \dots, n$. (1)

Как известно (1), существует обратимая формальная замена переменных

$$x_i = \xi_i(Y), \quad i=1, \dots, n, \quad (2)$$

которая приводит систему (1) к нормальной форме

$$\dot{y}_i = \psi_i(Y) = y_i \sum_{(q, \lambda)=0} g_{iq} Y^q, \quad i=1, \dots, n; \quad (3)$$

здесь ξ_i и ψ_i — формальные степенные ряды от $Y=(y_1, \dots, y_n)$ без свободных членов; матрица линейных членов в (2) единична: $Q=(q_1, \dots, q_n)$, $Y^q = y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n}$. Пусть фиксировано натуральное число $m < n$; всякий вектор $V=(v_1, \dots, v_n)$ будем разбивать на две части $V'=(v_1, \dots, v_m)$ и $V''=(v_{m+1}, \dots, v_n)$. Равенства

$$x_j = \zeta_j(X'), \quad j=m+1, \dots, n, \quad (4)$$

определяют формальное интегральное многообразие системы (1), если

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \varphi_i(X', Z''(X')) = \varphi_j(X', Z''(X')), \quad j=m+1, \dots, n; \quad (5)$$

здесь ζ_j — степенные ряды без свободных и линейных членов.

Обратимая замена (2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между формальными интегральными многообразиями систем (1) и (3). В частности, многообразию (4) соответствует формальное многообразие

$$y_j = \eta_j(Y'), \quad j=m+1, \dots, n, \quad (6)$$

которое является интегральным для системы (3). Системы (1) и (3) на своих интегральных многообразиях (4) и (6) индуцируют формальные системы

$$\dot{x}_i = \varphi_i(X', Z''(X')), \quad i=1, \dots, m, \quad (7)$$

и

$$\dot{y}_i = \psi_i(X', H''(Y')) \equiv \hat{\psi}_i(Y'), \quad i=1, \dots, m, \quad (8)$$

причем система (8) является нормальной формой системы (7).

Если ряды $Z''(X')$ сходятся в некоторой окрестности нуля $X'=0$, то многообразие (4) будет аналитическим. Возникает следующая

Задача. Пусть у аналитической системы (1) известны формальное многообразие (4) и нормальная форма на нем (8). В каких случаях об аналитичности многообразия (4) можно судить по формальной системе (8) (или, что является более общим, — по системе (3))? Ведь даже если нормализующее преобразование (2) расходится (а это случается часто (1)), то могут быть отдельные аналитические интегральные многообразия. Отыскание же формальных интегральных многообразий (6) и их нормальных форм (8) сводится к алгебраическим вычислениям, зачастую весьма несложным. Для некоторых случаев Ляпунов, Горн, Дюляк, Зигель и Мозер нашли условия, достаточные для аналитичности многообразия (4). Все их результаты являются частными случаями теоремы 3 из § 10 работы (1) (там же библиография). В настоящей работе обобщена указанная теорема и, кроме того, даны необходимые условия аналитичности.

1. Интегральное многообразие (4) назовем *изолированным*, если существует такое число $s > 0$, что для всякого другого интегрального многообразия $X'' = \Theta''(X')$ системы (1) ряды $Z''(X')$ и $\Theta''(X')$ отличаются в членах порядка, меньшего s . Например, в системе $\dot{X} = 0$ всякое многообразие является интегральным и неизолированным. В дальнейшем будем рассматривать только изолированные интегральные многообразия. При отыскании формальных решений системы (5) методом неопределенных коэффициентов возникают знаменатели вида $(Q', \Lambda') - \lambda_j$. Поэтому в зависимости от множества целочисленных векторов $Q' \geq 0$, удовлетворяющих хотя бы одно из уравнений

$$(Q', \Lambda') = \lambda_j, \quad j = m+1, \dots, n, \quad (9)$$

будем различать следующие три типа интегральных многообразий:

I тип: уравнения (9) не имеют решений $Q' \neq 0$;

II тип: уравнения (9) имеют конечное число решений $Q' \neq 0$;

III тип: уравнения (9) имеют бесконечно много решений.

Существование интегральных многообразий типа I определяется собственными числами λ_i . Многообразия типов II и III существуют лишь в специальных случаях при определенных соотношениях между нелинейными членами рядов φ_i .

Рассмотрим $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ как точки на комплексной плоскости, и будем различать два случая:

1) Существует такая проходящая через нуль прямая \mathfrak{M} , что по одну сторону от нее нет точек λ_i . Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ лежат на \mathfrak{M} , $0 \leq l \leq m$.

2) Точки λ_i лежат по разные стороны всякой проходящей через нуль прямой

Условие A' . В случае 1) существует такой степенной ряд $a(Y')$, что в нормальной форме (8) $\varphi_i = \lambda_i y_i a(Y')$, $i = 1, \dots, l$; в случае 2) существуют такие степенные ряды $a(Y')$ и $b(Y')$, что $\varphi_i = \lambda_i y_i a + \bar{\lambda}_i y_i b$, $i = 1, \dots, m$.

Это условие означает, что в нормальной форме (8) l рядов в случае 1) и m рядов в случае 2) удовлетворяют $l-1$ и $m-2$ линейным соотношениям соответственно. Собственное число λ_j , $m < j \leq n$, назовем *особым*, если точка λ_j является точкой накопления для значений (Q', Λ') , когда целочисленный вектор Q' пробегает ортант $Q \geq 0$. Пусть E_i есть i -ый орт; обозначим $\omega_k = \min |(Q', \Lambda')|$ по $q_1 + \dots + q_m < 2^k$, $(Q', \Lambda') \neq 0$, $Q' \in \mathbb{Z}^m$, $Q' + E_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$.

Условие ω (1). — $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ln \omega_k < \infty$.

Теорема 1. Если (4) — формальное интегральное многообразие I или II типа, его нормальная форма (8) удовлетворяет условию A' , все

числа $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ — неособые и Λ' удовлетворяет условию ω , то многообразии (4) аналогично.

Доказательство заключается в построении и оценке такой подстановки

$$x_i = \theta_i(Y') = y_i \sum h_{iQ'} Y'^{Q'}, \quad i=1, \dots, n,$$

которая сводит систему (1) либо к нормальной форме (8) (в случае 2) и в тех случаях 1), когда ω_k не стремится к нулю), либо к полунормальной форме ((¹), § 9) на многообразии (4) ((в случае 1), если $\omega_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$). Для многообразий типа III аналогичная теорема представляется справедливой, но доказательство удастся провести при дополнительных предположениях, позволяющих оценить ряды

$$\sum_{\lambda_j = (Q', \Lambda')} h_{jQ'} Y'^{Q'}, \quad j=m+1, \dots, n.$$

2. Если среди чисел $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ есть особые, т. е. знаменатели $(Q', \Lambda') - \lambda_j$ сколь угодно малы, то нормальной формы (8) уже недостаточно для решения вопроса об аналитичности интегрального многообразия (4). Рассмотрим такую нормальную форму (3) системы (1), что многообразии (6) задается равенствами $Y'' = 0$. Тогда нормальная форма (8) получается из (3), если положить $Y'' = 0$, т. е. $\hat{\psi}_i$ — это свободная от Y'' часть ряда ψ . Выделим в ψ'' линейные по Y'' части:

$$\psi_j = \sum_{k=m+1}^n c_{jk}(Y') y_k + \dots, \quad j=m+1, \dots, n,$$

и рассмотрим систему

$$\dot{y}_j = \sum_{k=m+1}^n c_{jk}(Y') y_k, \quad j=m+1, \dots, n. \quad (10)$$

Систему уравнений (8), (10) назовем полной нормальной формой на многообразии (4) (или (6)). Пусть нумерация переменных x_{m+1}, \dots, x_n такова, что $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+r}$ суть все особые собственные числа в случае 2) или все особые собственные числа, лежащие на прямой \mathbb{M} , в случае 1) ($0 \leq r \leq n-m$). Тогда матрица $(c_{jk})_{m+1}^n$ является блочно-диагональной с двумя блоками $(c_{jk})_{m+1}^{m+r}$ и $(c_{jk})_{m+r+1}^n$.

Условие В. Выполнено условие A' и нильпотентна матрица

$$(c_{jk} - \delta_{jk}(\lambda_j a + \bar{\lambda}_j b))_{m+1}^{m+r};$$

здесь δ_{jk} — символ Кронекера, в случае 1) считаем $b = 0$.

Заметим, что при $r=0$ условие В не накладывает никаких дополнительных ограничений.

Теорема 2. Пусть у системы (1) имеется такое формальное интегральное многообразие (4), для которого нормальная форма (8) не удовлетворяет условию A' или полная нормальная форма (8), (10) не удовлетворяет условию В.

Тогда существует такая аналитическая система, которая имеет формальное неаналитическое интегральное многообразие с той же самой полной нормальной формой (8), (10).

Доказательство аналогично доказательству теоремы III в (¹). Имеющиеся там в § 6 примеры расходимости рядов относятся именно к интегральным многообразиям (см. также (²)). Условие В аналогично условию A_1'' (ср. теорема 4 в § 10 работы (¹)). Итак, условие A' необхо-

димо для аналитичности интегрального многообразия. Если есть малые знаменатели $(Q', \Lambda') - \lambda_j$, то необходимо еще и условие В.

3. Пусть общее решение системы (1), принимающее при $t=0$ значение X^0 , есть $X = \Omega(t, X^0)$. Это решение будет периодическим, если для некоторого комплексного числа $\tau \neq 0$ выполнены равенства

$$\Omega(\tau, X^0) = X^0. \quad (11)$$

Поскольку система (1) аналитична, то (11) — аналитическая система n уравнений относительно $n+1$ переменных τ, X^0 .

Будем говорить, что формальное интегральное многообразие (4) заполнено периодическими решениями, если существует такой формальный ряд

$$\tau = \tau(X') = \tau_0 + \dots, \quad (12)$$

который вместе с (4) удовлетворяет равенства (11) тождественно по X' .

Теорема 3. Изолированное формальное интегральное многообразие (4) периодических решений системы (1) является аналитическим.

Доказательство. Система аналитических уравнений (11) имеет изолированное формальное решение (4), (12). По теореме 1.2 статьи (3) такое решение аналитично.

Заметим, что теорема 3 и ее доказательство остаются верными и в окрестности периодического решения, если там ввести локальные координаты. Все это говорит в пользу гипотезы 1 п. 13 работы (4), но там имеется в виду более сложный случай, когда интегральное многообразие может иметь особенности алгебраического типа.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
30 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Д. Брюно, Тр. Московск. матем. общ., т. 25, 119 (1971); т. 26, 199 (1972).
² А. Д. Брюно, Матем. заметки, т. 16, № 4, 466 (1974). ³ М. Artin, Invitationes math., v. 5, № 4, 277 (1968). ⁴ А. Д. Брюно, Матем. сборн., новая серия, т. 83 (125), № 2 (10), 273 (1970).