Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 532.5 *МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ*

Член-корреспондент АН СССР С. В. ВАЛЛАНДЕР

РАВНОВЕСИЕ БАРОКЛИННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В КОНСЕРВАТИВНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Система уравнений равновесия бароклинной теплопроводной жидкости в консервативном силовом поле записывается в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho\frac{\partial V}{\partial x},\quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\rho\frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho\frac{\partial V}{\partial z}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)=0; \tag{2}$$

$$\rho=\Phi(p,T); \tag{3}$$

здесь p — давление, ρ — плотность, V — потенциал массовых сил, k — коэффициент теплопроводности.

Коэффициент теплопроводности k, вообще говоря, следует считать заданной функцией температуры и давления. Входящая в (3) функция $\Phi(p, T)$ задана и ее производная $\partial\Phi/\partial T$, вообще говоря, отлична от нуля, ибо, по предположению, рассматриваемая жидкость бароклинна.

Из системы уравнений (1)—(3) должны быть найдены давление p, плотность ρ и температура T. Эта система уравнений переопределена, ибо имеется пять уравнений для отыскания трех искомых функций.

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы указать условие, которому должен удовлетворять потенциал массовых сил V для того, чтобы система (1)—(3) была разрешима, и указать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, из которых могут быть найдены искомые функции p и T, если условие разрешимости выполнено.

Из системы уравнений (1) непосредственно следуют равенства

$$\frac{D(p,V)}{D(x,y)}=0,\quad \frac{D(p,V)}{D(y,z)}=0,\quad \frac{D(p,V)}{D(z,x)}=0. \tag{4}$$

Из (4) следует, что между функциями p и V имеется зависимость

$$p=p(V). \tag{5}$$

Кроме того из (1) имеем

$$\frac{dp}{dV}=-\rho. \tag{6}$$

Следовательно,

$$\rho=\rho(V). \tag{7}$$

Соотношения (5)—(7) хорошо известны (см., например, ([1])).

Из (5), (7) и (3) следует, что в условиях задачи

$$T=T(V). \tag{8}$$

При наличии (5) и (8) коэффициент теплопроводности $k(p, T)$ является сложной функцией потенциала массовых сил V.

Соотношение (8) позволяет из (2) получить

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{dT}{dV}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{dT}{dV}\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{dT}{dV}\frac{\partial V}{\partial z}\right)=0. \qquad (9)$$

Выполняя в (9) дифференцирование, получаем

$$\frac{d}{dV}\left(k\frac{dT}{dV}\right)\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]+k\frac{dT}{dV}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)=0, \qquad (10)$$

ибо k — сложная функция V.

Из (10) имеем

$$\frac{d(k\,dT/dV)/dV}{k\,dT/dV}=-\frac{\partial^2 V/\partial x^2+\partial^2 V/\partial y^2+\partial^2 V/\partial z^2}{(\partial V/\partial x)^2+(\partial V/\partial y)^2+(\partial V/\partial z)^2}. \qquad (11)$$

В (11) слева стоит функция аргумента V. Не уменьшая общности, можем положить

$$\frac{d(k\,dT/dV)/dV}{k\,dT/dV}=\frac{d^2q(V)/dV^2}{dq(V)/dV}, \qquad (12)$$

где $q(V)$ — некоторая функция аргумента V.

Следовательно, рассматриваемая задача может быть решена только в том случае, если потенциал массовых сил V удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V/\partial x^2+\partial^2 V/\partial y^2+\partial^2 V/\partial z^2}{(\partial V/\partial x)^2+(\partial V/\partial y)^2+(\partial V/\partial z)^2}=-\frac{d^2q(V)/dV^2}{dq(V)/dV}. \qquad (13)$$

Уравнение (13) легко переписывается в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[q(V)]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}[q(V)]+\frac{\partial^2}{\partial z^2}[q(V)]=0. \qquad (14)$$

Из (14) видно, что равновесие бароклинной теплопроводной жидкости возможно только в таких консервативных полях массовых сил, когда некоторая функция $q(V)$ от потенциала массовых сил V является гармонической функцией.

Если условие (14) выполнено для некоторой функции $q(V)$, то эту функцию $q(V)$ можно считать известной.

Тогда правая часть (12) имеет вполне определенный смысл и из (12), выполняя одно интегрирование, получаем

$$k\frac{dT}{dV}=c_1\frac{dq(V)}{dV}, \qquad (15)$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Собирая вместе (6), (15) и (3), имеем уравнение задачи

$$\frac{dp}{dV}=-\Phi(p, T),$$

$$k(p, T)\frac{dT}{dV}=c_1\frac{dq(V)}{dV}; \qquad (16)$$

$$\rho=\Phi(p, T). \qquad (17)$$

Из обыкновенных дифференциальных уравнений (16) можем найти давление и температуру:

$$p=p(c_1, c_2, c_3, V), \qquad T=T(c_1, c_2, c_3, V), \qquad (18)$$

где c_2 и c_3 — постоянные, вошедшие в решение при интегрировании системы (16).

Подставляя (18) в (17), получаем

$$\rho=\rho(c_1, c_2, c_3, V). \tag{19}$$

Три произвольных постоянных c_1, c_2 и c_3, вошедших в решение задачи (18), (19), можно находить из различных условий. В частности, такими условиями могут быть

$$\begin{aligned} p|_{V=V_1}&=p_1, \\ T|_{V=V_1}&=T_1, \\ T|_{V=V_2}&=T_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Заметим, что рассуждения, приведшие нас к системе уравнений (16), (17) в предположениях $k=k(p, T)$ и $\rho=\Phi(p, T)$, остаются справедливыми и при более общих предположениях $k=k(p, T, V)$ и $\rho=\Phi(p, T, V)$. Тогда вместо (16) и (17) имеем несколько более общие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dV}&=-\Phi(p, T, V), \\ k(p, T, V)\frac{dT}{dV}&=c_1\frac{dq(V)}{dV}; \end{aligned} \tag{21}$$

$$\rho=\Phi(p, T, V). \tag{22}$$

Такого рода обобщение иногда может иметь физический смысл. Один из простейших примеров осмысленной задачи такого рода доставляет изотропно турбулизованная, макроскопически покоящаяся атмосфера, молекулярный состав которой меняется с высотой и в которой коэффициент турбулентной теплопроводности зависит от высоты. В такой атмосфере молекулярный вес μ и коэффициент турбулентной теплопроводности k следует считать функциями V.

Допуская, что действует уравнение Клапейрона

$$p=\frac{R}{\mu}\rho T, \tag{23}$$

и полагая $\mu=\mu(V)$, $k=k(V)$, из (21) и (22) получаем

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dV}=-\frac{\mu(V)}{R}\frac{1}{T}; \tag{24}$$

$$\frac{dT}{dV}=\frac{c_1}{k(V)}\frac{dq(V)}{dV}; \tag{25}$$

$$\rho=\frac{\mu(V)}{R}\frac{p}{T}. \tag{26}$$

Из (25), (24) и (26) легко получаем

$$T=c_2+c_1\int_{V_0}^{V}\frac{dq(\xi)}{d\xi}\frac{1}{k(\xi)}d\xi; \tag{27}$$

$$p=c_3\exp\left[-\frac{1}{R}\int_{V_0}^{V}\frac{\mu(\eta)}{c_2+c_1\int_{V_0}^{\eta}Q\,d\xi}d\eta\right]; \tag{28}$$

$$\rho=\frac{\mu(V)}{R}\frac{c_3\exp\left[-\frac{1}{R}\int\limits_{V_0}^{V}\frac{\mu(\eta)}{c_2+c_1\int\limits_{V_0}^{\eta}Q\,d\xi}\,d\eta\right]}{c_2+c_1\int\limits_{V_0}^{V}Q\,d\xi}, \tag{29}$$

$$Q=\frac{dq(\xi)}{d\xi}\frac{1}{k(\xi)}.$$

В (27), (28) и (29) содержится некоторое обобщение известных барометрических формул.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. И. Седов*, Механика сплошной среды, т. 2, «Наука», 1970, стр. 6.