Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 532.516 *ГИДРОМЕХАНИКА*

О. В. ВОИНОВ

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНЫХ ЖИДКИХ ПЛЕНОК И МОДЕЛЬ ИХ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО УТОНЬШЕНИЯ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 14 XI 1973)

Основным элементом жидких пен является пленка вязкой жидкости в газе, толщина которой чрезвычайно мала (до $10^{-5}-10^{-6}$ см) по сравнению с ее протяженностью. Течение в пленке и изменение ее толщины определяется большим числом факторов: вязкими и инерционными силами в объеме пленки, капиллярными силами, изменением поверхностного натяжения вдоль пленки, взаимодействием двойных электрических слоев, силами Ван-дер-Ваальса и особыми реологическими свойствами приповерхностного слоя жидкости, появляющимися за счет присутствия поверхностно-активных веществ (п.а.в.). Важен также конвективный и диффузионный перенос п.а.в. Все это сильно усложняет граничные условия, поэтому решение уравнений Навье — Стокса даже для малых возмущений в пленке постоянной толщины оказывается трудоемким, а нелинейная нестационарная задача утоньшения пленки под действием давления, пониженного на ее краях, не решена до сих пор, хотя она важна для многих экспериментов ([1-4]). Модель утоньшения, основанная на решении Рейнольдса ([2], [5]), как следует из ([6]), неадекватна эксперименту.

В настоящее время исследовано движение тонкого слоя вязкой жидкости, граничащего с твердой поверхностью. Этому посвящена, в частности, гидродинамическая теория смазки. Свободные жидкие слои в присутствии п.а.в. представляют особый случай, так как обе поверхности слоя могут иметь заметную скорость, изменяющуюся вдоль слоя, и уравнения теории смазки оказываются неприменимыми.

Рассматривается слой однородной и изотропной несжимаемой жидкости, симметричный относительно координатной плоскости $x_3=0$. Жидкость содержит растворимое п.а.в.

Пусть толщина слоя h медленно изменяется вдоль координат, т. е. $h\ll l$, где l — характерный масштаб изменения h и основных параметров течения. Как и в теории смазки, предполагаем, что мало приведенное число Рейнольдса $R^*=h^2v'/(\nu l)$ (v' — характерная скорость жидкости, ν — кинематическая вязкость). Пусть также характерное время τ процесса велико $\tau\nu\gg h^2$, тогда за время, много меньшее τ, устанавливается распределение скорости по сечению слоя, близкое к стационарному. Если касательное напряжение в поверхности $p_{3i}=0$, то скорость в каждой точке сечения мало отличается от скорости поверхности. При этом локально имеет место чистая деформация, вращение жидких частиц отсутствует, слой только растягивается или сжимается. Если поверхность слоя неподвижна, течение аналогично течению в плоской трубе ([7]), применимы уравнения гидродинамической теории смазки ([8]). Скорость представляется локально в виде суперпозиции двух точных решений уравнений Навье — Стокса с медленно изменяющимися параметрами

$$v_i'=v_i(x_1,\ x_2,\ t)+{}^3/_2(1-(2x_3/h)^2)u_i(x_1,\ x_2,\ t)+O(h),$$
$$v_3'=O(h),\quad i=1,\ 2. \tag{1}$$

Рассмотрим вначале отдельно уравнения движения в каждом течении.

Течение 1 задается первым членом (1). Пусть вдоль слоя действует постоянная по сечению объемная сила $F^{(1)}$, на поверхности при $x_3=h/2$ напряжения $p_{3i}=0$, $p_{33}=p_n^{(1)}$. Применяя теорему импульсов в интегральной форме ([9]) к произвольному объему слоя, продольные размеры которого много больше толщины слоя h, но много меньше масштаба течения l, и учитывая закон Навье — Стокса, уравнение неразрывности и граничные условия, получим

$$h\rho\, dv_i/dt=hF_i^{(1)}+h\nabla_i p_n^{(1)}+\nabla_j\{h\mu(2\delta_{ij}\operatorname{div} v+\nabla_j v_i+\nabla_i v_j)\}. \qquad (2)$$

Здесь и далее применяются двумерные векторные дифференциальные операции, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, δ_{ij} — символ Кронекера.

Течение 2. Пусть объемная сила равна $F^{(2)}$. На поверхности слоя при $x_3=h/2$ $p_{33}=p_n^{(2)}$, $p_{3i}\neq 0$. В приближении ползущего движения можно найти выражение для средней скорости u течения 2 в (1):

$$12\mu u_i=h^2\nabla_i p_n^{(2)}+h^2F_i^{(2)}=-2hp_{3i}|_{x_3=h/2}. \qquad (3)$$

Вторая формула связывает касательные силы p_{3i} в поверхности с градиентом давления, так как здесь давление в каждой точке равно $p_n^{(2)}$. В течении, представляющем суперпозицию течений 1 и 2,

$$F_i=F_i^{(1)}+F_i^{(2)}, \quad p_n=p_n^{(1)}+p_n^{(2)}.$$

При сложении потоков учет инерционного члена в (2) имеет смысл, если $|d\mathbf{v}/dt|\gg|d\mathbf{u}/dt|$. В общем случае неаддитивность вызывается нелинейностью инерционных членов в уравнениях движения. Здесь аддитивность соблюдается приближенно, благодаря тому что в одном из решений инерционные эффекты пренебрежимо малы. Если $|\mathbf{v}|\ll|\mathbf{u}|l/h$, то течение 1 происходит практически без диссипации и можно пренебрегать его вязкими напряжениями по сравнению с вязкими напряжениями в течении 2.

Условие для нормального к границе $x_3=h/2$ напряжения определяется давлением в газе p_0, кривизной поверхности раздела и дополнительным «расклинивающим давлением» П, введенным в ([10]):

$$p_n=-p_0+{}^1/_2\sigma\Delta h+\Pi, \quad \Pi=\Pi(h, T). \qquad (4)$$

Составляющая П, связанная с электростатическим отталкиванием поверхностных слоев, имеет непосредственный физический смысл дополнительного нормального напряжения. Составляющая П, связанная с взаимодействием молекул, лишь формально может быть включена в граничное условие (4). Непосредственный расчет ([11]), в котором силы Ван-дер-Ваальса приводят к объемным силам, зависящим от наклона поверхности пленки, подтверждает законность этой процедуры. Как известно ([3]), силы Ван-дер-Ваальса являются одной из основных причин разрушения макроскопических жидких пленок.

Условие для касательного напряжения в поверхности нетрудно получить, сопоставляя поверхности некоторый тензор двумерных напряжений $P_{ij}^{(S)}$. Как показали многочисленные эксперименты ([12–14]), тензор $P_{ij}^{(S)}$ не сводится к поверхностному натяжению, а в присутствии п.а.в. зависит от скорости деформирования поверхности, т. е. в узком приповерхностном слое происходит аномально большая диссипация энергии. Предполагая, что толщина этого слоя мала по сравнению с h, получим

$$p_{3i}=\nabla_j P_{ij}^{(S)}, \quad P_{ij}^{(S)}=P_{ij}^{(S)}(\Gamma, \nabla_i v_j, T); \qquad (5)$$

здесь Г — концентрация п.а.в. на поверхности.

Для малых скоростей деформирования можно принять реологическое уравнение, аналогичное закону Навье — Стокса:

$$P_{ij}^{(s)}=\sigma\delta_{ij}+\lambda_s \operatorname{div} v\delta_{ij}+\mu_s(\nabla_i v_j+\nabla_j v_i). \qquad (6)$$

Зависимости $\sigma(\Gamma, T)$ хорошо изучены [15]. Считаем также известной изотерму адсорбции, связывающую значения Γ с концентрацией C п.а.в. в объеме жидкости

$$\Gamma=\Gamma(C, T) \quad \text{или} \quad \Gamma=CH(C, T). \qquad (7)$$

Уравнение переноса п.а.в. запишем для случая, когда коэффициент объемной диффузии $D\gg h^2/\tau$ и концентрация C постоянна по сечению. Поток п.а.в. в пленке определяется конвективным и диффузионным переносом в объеме и в поверхности (коэффициент диффузии D_s):

$$\frac{\partial}{\partial t}(hC+2\Gamma)=-\operatorname{div}[-Dh\nabla C-2D_s\nabla\Gamma+(\mathbf{u}+\mathbf{v})hC+2\mathbf{v}\Gamma]. \qquad (8)$$

На основании формул (2) — (5) справедливы следующие уравнения движения пленки:

$$h\rho\, dv_i/dt=hF_i+h\nabla_i(^1/_2\sigma\Delta h+\Pi)+2\nabla_j P_{ij}^{(s)}+$$
$$+\nabla_j\{h\mu(2\delta_{ij}\operatorname{div} v+\nabla_i v_j+\nabla_j v_i)\}, \qquad (9)$$

$$6\mu u_i=-h\nabla_j P_{ij}^{(s)}, \quad i=1,2; \quad j=1,2. \qquad (10)$$

Уравнение сохранения массы

$$\operatorname{div}(h\mathbf{u}+h\mathbf{v})=-\partial h/\partial t \qquad (11)$$

замыкает систему уравнений.

Уравнения (6) — (11) дают 6 нелинейных уравнений в частных производных и одно алгебраическое соотношение относительно 7 неизвестных: компонент скорости v поверхности и средней скорости u движения относительно поверхности, толщины пленки h и концентрации п.а.в. в объеме C и на поверхности Γ.

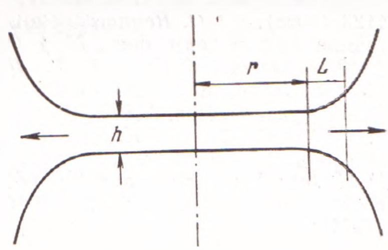

Рис. 1

Рассмотрение волн малой амплитуды в пленке постоянной толщины на основе полученных уравнений согласуется с результатами [16], относящимися к волнам с длиной $\lambda\gg h$.

Полученная система уравнений жидких пленок исследовалась асимптотическими методами и при помощи численных расчетов на ЭВМ для случая утоньшения пленки, засасываемой в границы Плато (рис. 1).

Имеются решения с утолщением в центре. При этом течение 2 с поперечным градиентом скорости важно всюду и оказывается основной причиной возникновения неравномерности толщины. Пленка практически плоскопараллельная, если в основной области пленки имеется только течение 1 и лишь у границы пленки с мениском — течение 2. Диссипация энергии и градиенты давления локализованы в узкой области $L\sim(h\sigma/p_\sigma)^{1/2}\sim$ $\sim(hR)^{1/2}$, где пленка граничит с мениском радиуса R. Таким образом, гидродинамической моделью утоньшения пленки пены, при котором она остается близкой к плоскопаралельной, является сплющивание пленки без каких-либо заметных затрат энергии в центральной области и течение с градиентом давления в краевой области.

Плоскопараллельное утоньшение возможно, только если поверхностное натяжение σ мало изменяется вдоль пленки и поверхность подвижна, что возможно либо за счет диффузии и адсорбции, либо при относительно малом количестве п.а.в. Если σ и Γ слабо зависят от C (насыщение адсорбции) или если в (8) $H \ll h$, т. е. количество п.а.в. в объеме пленки велико по сравнению с количеством в поверхности, то возможны деформации поверхности без заметных $\operatorname{grad} \sigma$. Диффузия благоприятствует этому, если радиус пленки r достаточно мал $r^2 \ll D\tau$, как например, в экспериментах ([2–4]). Тогда значительно ослабляются изменения σ и Γ, вызываемые деформацией поверхности. Во всех указанных случаях пленка стабилизируется благодаря влиянию поверхностной вязкости в области перехода от пленки к мениску.

Пленка может утоньшаться плоскопараллельно в отсутствие п.а.в. или если вязкость жидкости достаточно велика. Тогда всюду в пленке имеется только течение 1. Основные уравнения в пренебрежении инерционными силами интегрируются в элементарных функциях. Толщина h в переходной области от пленки к мениску определяется формулой

$$\frac{h}{h_0} - 1 + \frac{1}{6} \ln \frac{3(h-h_0)^2}{h^2+hh_0+h_0^2} - \frac{1}{3^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{2h+h_0}{h_0 3^{1/2}} + \frac{\pi}{3^{3/2}} = \frac{x-r}{3} \left(\frac{p_\sigma}{\sigma h_0} \right)^{1/2},$$

где p_σ — разность давлений в газе и в мениске, x — расстояние до центра, h_0 — толщина в центре.

Закон утоньшения имеет вид

$$\frac{dh_0}{dt} = -\frac{3}{4\mu r} (\sigma p_\sigma)^{1/2} h_0^{3/2}.$$

Институт физической химии
Академии наук СССР
Москва

Поступило
17 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *K. J. Mysels, K. Shinoda, S. Frankel*, Soap Films. Studies of their Thinning, London, 1959. [2] *A. Scheludko*, Koll.— Zs., B. 155, 39 (1957). [3] *A. Scheludko*, Proc. Kön. Akad. Wetensch., B. 65, 87 (1962). [4] *A. Scheludko, E. Manev*, Trans. Farad. Soc., v. 64 1123 (1968). [5] *O. Reynolds*, Phil. Trans., v. 177, 157 (1886). [6] *О. В. Воинов*, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 1 (1970). [7] *Л. И. Седов*, Механика сплошной среды, т. 2, «Наука», 1970. [8] *Г. Шлихтинг*, Теория пограничного слоя, ИЛ, 1956. [9] *Л. И. Седов*, Механика сплошной среды, т. 1, «Наука», 1970. [10] *Б. В. Дерягин, М. М. Кусаков*, Изв. АН СССР, сер. хим., 1936, 741; 1937, 1119. [11] *О. В. Воинов*, ЖФХ, т. 46, 485 (1972). [13] *K. Schütt*, Ann. Phys., B. 13, 712 (1904). [13] *А. А. Трапезников*, В сборн. Вязкость жидкостей и коллоидных растворов, Изд. АН СССР, 1941. [14] *M. Joly*, In: Surface and Colloid Science, v. 5, 1972. [15] *Э. А. Мелвин-Хьюз*, Физическая химия, т. 1, ИЛ, 1962. [16] *О. В. Воинов*, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 3 (1971).