Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 513.88:513.83

МАТЕМАТИКА

В. И. ДМИТРИЕВ

ТЕОРЕМЫ О ПАРАМЕТРАХ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА КОНСТАНТ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 19 XI 1973)

Пусть (M, μ) — пространство с мерой, E — функциональная банахова решетка (ф.б.р.) на (M, μ), A — банахово пространство. Совокупность $E(A)$ всех A-значных сильно μ-измеримых (классов) функций $u=u(m)$, $m\in M$, $u(m)\in A$, таких, что $\|u(m)\|_A\in E$, является банаховым пространством по норме

$$\|u\|_{E(A)}=\|\|u(m)\|_A\|_E.$$

Отметив, что для банаховой пары B_0, B_1 мы полагаем

$$\|y\|_{B_0+B_1}=K(y, 1;\ B_0, B_1),$$

где

$$K(y, t;\ B_0, B_1)=\inf_{y_0+y_1=y}(\|y_0\|_{B_0}+t\|y_1\|_{B_1})$$

при $t\geqslant0$ [5], напомним, что метод констант — способ построения интерполяционных пространств [6, 2] — заключается в том, что банаховой паре A_0, A_1 с помощью двух ф.б.р. E_0, E_1 (пространств-параметров) на (M, μ) сопоставляется банахово пространство $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}\subset A_0+A_1$, получающееся из суммы $E_0(A_0)+E_1(A_1)$ как замкнутое подпространство всех постоянных μ-п.в. функций (отождествляемых с их значениями).

Если E — ф.б.р. на $((0, \infty), dt/t)$, то выражение $\|K(x, t;\ A_0, A_1)\|_E$ задает норму банахова пространства $(A_0, A_1)_E{}^K$, и с точностью до эквивалентных норм

$$(A_0, A_1)_E{}^K=(A_0, A_1)_{E, E^1},$$

где

$$\|f\|_{E^\theta}=\|t^\theta f(t)\|_E,\quad -\infty<\theta<\infty.$$

В 1963 г. Ж. Петре доказал [5, 7], что

$$(A_0, A_1)_{L_{p_0}^{-\theta}, L_{p_1}^{1-\theta}}=(A_0, A_1)_{L_p^{-\theta}}^K$$

(с эквивалентными нормами), где $0<\theta<1$, $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$, и поставил вопрос [6]: для каких ф.б.р. E_0, E_1 на $((0, \infty), dt/t)$ существует ф.б.р. E на $((0, \infty), dt/t)$ такая, что

$$(A_0, A_1)_{E_0, E_1}=(A_0, A_1)_E{}^K.$$

Пусть $x\in A_0+A_1$, $s\geqslant0$. Положим [3, 4, 1]

$$G(x, s;\ A_0, A_1)=\inf_{\substack{x_0+x_1=x\\ \|x_0\|_{A_0}\leqslant s}}\|x_1\|_{A_1}$$

($=\infty$, если представлений $x_0+x_1=x$ с $\|x_0\|_{A_0}\leqslant s$ не существует).

Теорема 1.

$$\|x\|_{(A_0, A_1)_{E_0, H_1}}=\inf_\varphi(\|\varphi(m)\|_{E_0}+\|G(x, \varphi(m);\ A_0, A_1)\|_{E_1}),$$

где инфимум берется по всем μ-измеримым функциям $\varphi=\varphi(m)$ таким, что $\varphi(m)\geqslant K(x, 0;\ A_0, A_1)$ μ-п.в.

Лемма 1. *Если* $s\neq K(x,0;A_0,A_1)$, *то*

$$G(x,s;\ A_0,A_1)=\sup_{t>0}\frac{(K(x,t;A_0,A_1)-s)^+}{t}=\operatorname{ess\,sup}_{t>0}\frac{(K(x,t;A_0,A_1)-s)^+}{t}.$$

Лемма 2. *Если* L_∞, E — *ф.б.р. на* (M,μ), *то*

$$G(f,s;L_\infty,E)=\|(|f(m)|-s)^+\|_E.$$

Лемма 3 (основная). *Если* $s\neq K(x,0;A_0,A_1)$, *то*

$$G(x,s;A_0,A_1)=G(K(x,\cdot;A_0,A_1),s;L_\infty,L_\infty^{-1}).$$

Доказательство вытекает из леммы 1 и леммы 2 с $f=K(x,\cdot;A_0,A_1)$ и $E=L_\infty^{-1}$.

Теорема 2 (общая теорема о параметрах).

$$\|x\|_{(A_0,A_1)_{E_0,E_1}}=\|K(x,t;A_0,A_1)\|_{(L_\infty,L_\infty)_{E_0,E_1}},$$

т. е. $(A_0,A_1)_{E_0,E_1}=(A_0,A_1)^K_{(L_\infty,L_\infty^{-1})_{E_0,E_1}}$ *с равными нормами.*

Доказательство вытекает из леммы 3 и теоремы 1.

Если E_0, E_1 — ф.б.р. на (M,μ), то кальдеронова шкала между E_0 и E_1 состоит из банаховых пространств $E_0^{1-\theta}E_1^{\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant1$, содержащих те и только те μ-измеримые функции $f=f(m)$, которые допускают оценку $|f(m)|\leqslant\leqslant\lambda|f_0(m)|^{1-\theta}|f_1(m)|^\theta$, $\lambda\geqslant0$, $\|f_i\|_{E_i}\leqslant1$, с нормой $\inf\lambda$.

Теорема 3 (специальная теорема о параметрах). *С точностью до эквивалентных норм (при* $0\leqslant\theta_0\neq\theta_1\leqslant1$)

$$(L_\infty,L_\infty^{-1})_{E_0^{1-\theta_0}E_1^{\theta_0},\,E_0^{1-\theta_1}E_1^{\theta_1}}=(L_\infty,L_\infty^{-1})_{(L_\infty,L_\infty^{-1})^{\theta_0}_{E_0,E_1},\,(L_\infty,L_\infty^{-1})^{\theta_1}_{E_0,E_1}}.$$

Лемма 4. *Если* E — *ф.б.р. на* $((0,\infty),dt/t)$, $-\infty<\theta_0\neq\theta_1<\infty$, *то величины*

$$\|f\|_{(L_\infty,L_\infty^{-1})_{E^{\theta_0},E^{\theta_1}}}\quad и\quad \|t^{\theta_0}K(f,t^{\theta_1-\theta_0};L_\infty,L_\infty^{-1})\|_E$$

эквивалентны.

Лемма 5. *Если измеримая функция* $f=f(t)$ *неотрицательна при* $0<t<\infty$, *то* $K(f,t;L_\infty,L_\infty^{-1})$ *является наименьшей вогнутой мажорантой* f.

Теорема 4 (теорема о параметрах для кальдероновой шкалы). *Если* $0\leqslant\theta_0\neq\theta_1\leqslant1$, *то величины*

$$\|x\|_{(A_0,A_1)_{E_0^{1-\theta_0}E_1^{\theta_0},\,E_0^{1-\theta_1}E_1^{\theta_1}}}\quad и\quad \|t^{\theta_0}K(x,t^{\theta_1-\theta_0};A_0,A_1)\|_{(L_\infty,L_\infty^{-1})_{E_0,E_1}}$$

эквивалентны.

Доказательство вытекает из теоремы 2, теоремы 3, леммы 4 и леммы 5.

«Вычислив» пространство $(L_\infty,L_\infty^{-1})_{L_\infty^\theta,\,L_1^{1-\theta}}$ (а это легко сделать с помощью теоремы 1 и того, что если $K(x,0)=0$, то $K_\infty(x,t)==tG(x,K_\infty(x,t))$ при $t>0$; здесь $K_\infty(x,t)=K_\infty(x,t;A_0,A_1)==\inf\limits_{x_0+x_1=x}\max(\|x_0\|_{A_0},t\|x_1\|_{A_1})$) и применяя теорему 4 при $E_0=L_\infty^{-\theta}$, $E_1=L_1^{1-\theta}$, получим теорему Ж. Петре.

Автор благодарит С. Г. Крейна за полезные обсуждения.

Воронежский лесотехнический институт

Поступило 15 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. Berhg*, Univ. Lund., v. 6 (1971). [2] *В. И. Дмитриев*, ДАН, т. 198, 4, 747 (1971). [3] *E. Gagliardo*, C. R., v. 248, 3388 (1959). [4] *G. G. Lorentz, T. Shimogaki*, J. Func. An., v. 2, 31 (1968). [5] *J. Peetre*, Ric. Matem., v. 12, 248 (1963). [6] *J. Peetre*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, v. 34, 133 (1964) [7] *J. Peetre*, Studia Math., v. 34, 23 (1970).