

А. Н. КОНОВАЛОВ, Э. В. СМИРНОВА

**О МОДЕЛИ БАКЛЕЯ — ЛЕВЕРЕТТА ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 4 I 1971)

Фильтрация двухфазной несжимаемой жидкости в трубке тока постоянного сечения при отсутствии массовых сил и капиллярного скачка описывается, как известно ⁽¹⁾, уравнением Баклея — Леверетта

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + w \frac{\partial \varphi(s)}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

в (1) m — пористость, s — насыщенность вытесняющей фазы, w — суммарная скорость фильтрации, которую будем предполагать постоянной, $\varphi(s)$ — так называемая функция Баклея — Леверетта,

$$\varphi(s) = \frac{\mu_0 f_1(s)}{\mu_0 f_1(s) + f_2(s)}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \quad (2)$$

в (2) μ_i — вязкость i -й фазы, $f_i(s)$ — относительная проницаемость i -й фазы. Индекс 1 относится к вытесняющей, индекс 2 — к вытесняемой фазе.

Для уравнения (1) рассмотрим смешанную задачу Коши

$$s(x, 0) = \psi(x), \quad x > 0, \quad s(0, t) = \text{const}, \quad t > 0. \quad (3)$$

Задача (1), (3) в некотором смысле является модельной при описании процесса вытеснения нефти водой в условиях, когда капиллярным скачком можно пренебречь. Известно, что решение задачи (1) — (3), начиная с некоторого $t=t_0$, может, вообще говоря, не обладать той гладкостью, которой оно обладало при $t < t_0$, т. е. при любой сколь угодно гладкой функции $\psi(x)$ в решении задачи (1) — (3) образуется разрыв. Пусть $\psi'(x) \leq 0$, тогда условие образования (необразования) разрыва может быть записано в виде

$$\varphi'' > 0 \quad (\varphi'' \leq 0). \quad (4)$$

Типичный вид функции $\varphi(s)$ и ее производной представлен на рис. 1. Характерным является существование точки $s=s^*$, слева и справа от которой φ'' имеет разные знаки. Кроме того, $f_2(\bar{s})=0$, $f_1(\underline{s})=0$ и, следовательно, когда $\bar{s} \leq s < 1$ или $0 < s \leq \underline{s}$, то одна из фаз неподвижна.

Разобьем область изменения s на интервалы:

$$\underline{s} < s_1 < \dots < s_m < s_{m+1} < \dots < \bar{s}.$$

Поскольку $f_i(s)$ определяются экспериментально и, следовательно, с неустранимой погрешностью, то на каждом таком интервале с достаточной степенью точности можно считать $f_i(s)$ линейной функцией. Такое представление дает возможность изучить поведение функции $\varphi'(s)$ для $s \in (\underline{s}, \bar{s})$ в зависимости от параметра μ_0 . Несложное исследование показывает, что

$$\lim_{\mu_0 \rightarrow 0} s^* = \bar{s}, \quad \lim_{\mu_0 \rightarrow \infty} s^* = \underline{s}.$$

Таким образом, при малых значениях μ_0 движение по своему характеру близко к поршневому вытеснению. Если же μ_0 велико, то вытесняющая жидкость оказывается более подвижной, способной к проникновению в об-

ласти высокой насыщенности вытесняемой жидкости, резкая граница между фазами исчезает.

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведены результаты численных расчетов задачи (1) — (3) на один и тот же момент времени, но с различными μ_0 . В качестве $f_i(s)$ для $s \in (\underline{s}=0,2; \bar{s}=0,8)$ взяты следующие, довольно часто употребляемые функциональные зависимости:

$$f_1(s) = [(s-0,2)/0,8]^3, \quad f_2(s) = [(0,8-s)/0,6]^3. \quad (5)$$

Эти расчеты, как и сделанные выше выводы о структуре течения для

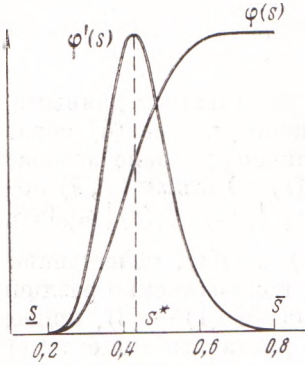


Рис. 1. Функция $\varphi(s)$ и ее производная $\varphi'(s)$ по данным (1–3)

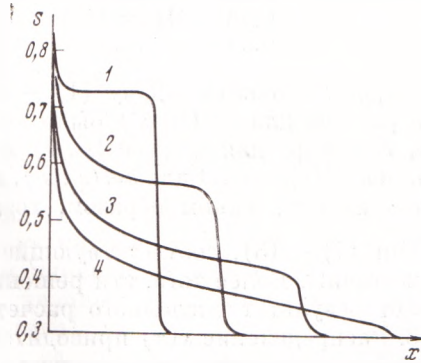


Рис. 2. Результаты решения задачи (1) — (3) при различных μ_0 : 1 — $\mu_0=1$; 2 — 8; 3 — 40; 4 — 141

предельных значений μ_0 , хорошо согласуются с общепринятыми представлениями (1, 2) о модели Баклея — Леверетта.

Как $f_i(s)$, так и $\varphi(s)$, являются экспериментально измеряемыми функциями (2, 3), поэтому особое значение приобретает вопрос об устойчивости решения задачи (1) — (3) по отношению к входным данным (под входными данными мы понимаем $f_i(s)$ либо $\varphi(s)$).

Возьмем результат обработки экспериментальных данных в форме (5). В точке $s=s^*$ проведем касательную к $\varphi(s)$. Обозначим через s_0 точку пе-

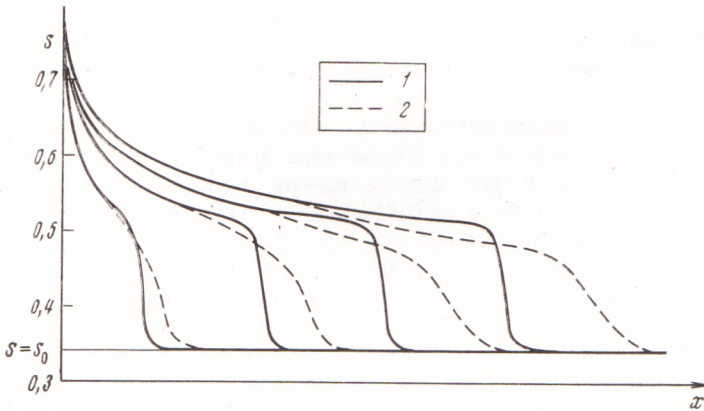


Рис. 3. Распределение $s(x)$: 1 — $f_i(s)$, 2 — $\bar{f}_i(s)$

ресечения касательной с осью s . Заменим $\varphi(s)$ на участке (s_0, s^*) проведенной касательной и новую функцию Баклея — Леверетта обозначим через $\bar{\varphi}(s)$. Фазовые проницаемости $\bar{f}_i(s)$, отвечающие построенной $\bar{\varphi}(s)$, можно выбрать разными способами. Остановимся на одном из них. Для $s \in (s_0,$

s^*) положим $\bar{f}_1(s) = as + b$. Коэффициенты a, b определим из условий

$$as_0 + b = 0, \quad as^* + b = f_1(s^*).$$

На участке (s_0, s^*) $\bar{f}_2(s)$ определяется теперь однозначно, ибо для $s \in (s_0, s^*)$ имеем $\bar{\varphi}'(s) = \text{const} = \bar{\varphi}'(s^*)$. Ниже для $s \in (s_0, s^*)$ приводятся значения $f_i(s), \bar{f}_i(s)$; при этом $\mu_0 = 8$:

s	$f_1(s)$	$\bar{f}_1(s)$	$f_2(s)$	$\bar{f}_2(s)$
$s_0 = 0,344$	0,006	0,000	0,438	0,426
0,362	0,008	0,005	0,389	0,387
0,397	0,015	0,015	0,302	0,308
0,415	0,019	0,020	0,264	0,269
$s^* = 0,433$	0,025	0,025	0,229	0,229

Будем рассматривать задачу (1) — (3) с начальными данными из (s_0, \bar{s}) . Если раньше для $s \in (s_0, s^*)$ было выполнено условие (4) образования разрыва, то теперь для всех $s \in (s_0, \bar{s})$ выполнено условие необразования разрыва, ибо $\varphi'(s) = \text{const}$ для $s \in (s_0, s^*)$, а $\varphi''(s) < 0$ для $s \in (s^*, \bar{s})$ по определению точки $s = s^*$. Таким образом, хотя $\max_i |f_i(s) - \bar{f}_i(s)| \leq 0,008$, реше-

ния задачи (1) — (3), соответствующие $f_i(s)$ и $\bar{f}_i(s)$, качественно совершенно различны. Более того, эти решения и количественно различны, что доказывает результат численного расчета задачи (1) — (3), приведенный на рис. 3. Распределение $s(x)$ приводится на различные моменты времени, причем сплошная линия соответствует расчету с $f_i(s)$ в форме (5), пунктирная — расчету с $\bar{f}_i(s)$. Таким образом, решение смешанной задачи Коши (1) — (3) не является устойчивым по отношению к экспериментально измеряемым функциям $f_i(s)$.

В заключение отметим, что построить подобный пример было бы невозможно, если из эксперимента известно $\varphi'(s)$ либо $\varphi(s)$ и $s^*(\mu_0)$.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
20 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. А. Чарный, Подземная гидрогазодинамика, М., 1963. ² Р. Коллинз, Течения жидкостей через пористые материалы, М., 1964. ³ Д. А. Эфрос, ДАН, т. 110, № 5 (1956).