Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 517.945 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ, В. Р. КИРЕЙТОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЙ БИПОВЕРХНОСТЕЙ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Всюду в статье символом R^3 обозначается вещественное арифметическое трехмерное пространство переменных x, y, z; точки пространства R^3 обозначаются буквами $p, q, r, \ldots$, при этом $p=(p_1, p_2, q_3)$, $q=(q_1, q_2, q_3), \ldots$

Пусть Ω — замкнутая область в плоскости xOy пространства R^3, $\partial\Omega$ — ее граница и u — заданная на Ω вещественная непрерывная функция. Выберем число $\xi<\min\limits_{p\in\Omega} u(p)$.

ξ-Цилиндром функции u называется множество C_u^ξ, задаваемое условиями

$C_u^\xi=X_1\cup X_2\cup\Gamma(u)$,

$X_1=\{p\in R^3 \mid (p_1, p_2, 0)\in\Omega, p_3=\xi\}$,

$X_2=\{p\in R^3 \mid (p_1, p_2, 0)\in\partial\Omega, \xi\leqslant p_3\leqslant u(p_1, p_2)\}$,

$\Gamma(u)=\{p\in R^3 \mid (p_1, p_2, 0)\in\Omega, p_3=u(p_1, p_2)\}$.

Ясно, что $\Gamma(u)$ — график функции u на области Ω. C_u^ξ является замкнутой поверхностью в пространстве R^3 и множество $R^3\setminus C_u^\xi$ состоит из двух компонент связности. Ограниченную и неограниченную компоненты связности обозначим символами $(C_u^\xi)_-$ и $(C_u^\xi)_+$ соответственно.

Множество $\omega(p)$ для $p\in\Gamma(u)$ определим формулой

$$\omega(p)=\{q\in(C_u^\xi)_+\cup\Gamma(u) \mid [p, q]\cap(C_u^\xi)_-=\emptyset\};$$

здесь $[p, q]$ — отрезок, соединяющий точки p и q.

Положим $\omega(u)=\bigcap\limits_{p\in\Gamma(u)}\omega(p)$. Можно показать, что определение множеств $\omega(p)$ и $\omega(u)$ не зависит от выбора числа $\xi<\min\limits_{p\in\Omega} u(p)$.

Теорема 1. *Если Ω выпукла и если функция и непрерывно дифференцируема, то внутренность множества $\omega(u)$ непуста и выпукла в R^3.*

Пусть: a) $D(p, q, w)$ — вещественная функция, определенная для любого (здесь I^2 — плоскость переменных (w_1, w_2)) $w\in I^2$ и любых $p, q\in R^3$, связанных отношением $p\in T(q)$, $T(q)=\{r\in R^3 \mid r_3\leqslant q_3\}$;

b) $\mathbf{a}(p, q)$ — вектор-функция переменных $p, q\in R^3$ со значениями в пространстве R^3; p, q — произвольные точки пространства R^3; $\mathbf{a}(p, q)$ предполагается непрерывной и непрерывно дифференцируемой функцией по первому аргументу;

c) $\{F(q)\}_{q\in R^3}$ — семейство проектирующих отображений, где $F(q)$ при любом $q\in R^3$ является непрерывным и дифференцируемым отображением области $T(q)$ в плоскость I^2 переменных (w_1, w_2). Кроме того требуется, чтобы семейство проектирующих отображений $\{F(q)\}_{q\in R^3}$ обладало следующим свойством: для любой дифференцируемой функции u, определенной на замкнутой области Ω, и любой точки $q\in\omega(u)$ отображение φ области Ω в плоскость I^2, задаваемое формулой

$$\varphi_{r\in\Omega}(p)=[F(q)](p, u(p)),$$

было дифференцируемым гомеоморфизмом с невырожденным якобианом внутри области Ω.

d) (u, A) — упорядоченная пара вещественных функций, определенных, непрерывных и непрерывно дифференцируемых на замкнутой области Ω плоскости xOy пространства R^2; назовем (u, A) биповерхностью; вторая функция биповерхности предполагается строго положительной на всей области Ω.

Рассмотрим поверхностный интеграл

$$J(q, w) = \iint\limits_{\Gamma(u)} \tilde{A}(p) \cos(\widehat{\mathbf{a}(p, q), \mathbf{n}(p)}) D(p, q, w)\, dS, \qquad (*)$$

где $p \in \Gamma(u)$, $\mathbf{n}(p)$ — нормаль к верхней стороне графика $\Gamma(u)$ функции u, dS — элемент площади поверхности $\Gamma(u)$, $\tilde{A}(p) = A(p_1, p_2)$.

Функцию $J(q, w)$ от аргумента w при фиксированном q назовем D-образом биповерхности (u, A) в точке q.

Функцию $D(p, q, w)$ назовем δ-образной относительно семейства проектирующих отображений $\{F(q)\}_{q \in R^3}$, если она имеет вид

$$D(p, q, w) = c(p, q) \delta(w - F(p, q)),$$

где $\delta(\cdot)$ — δ-функция Дирака, а $c(p, q)$ — вещественная строго положительная функция, определенная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая по первому аргументу для любых p, $q \in R^3$, связанных отношением $p \in T(q)$.

Тройку точек q_1, q_2, $q_3 \in R^3$ назовем допустимой, если q_1, q_2, $q_3 \in \omega(u)$ и векторные поля $\mathbf{a}(p, q_1)$, $\mathbf{a}(p, q_2)$, $\mathbf{a}(p, q_3)$ линейно независимы в каждой точке $p \in \Gamma(u)$.

Теорема 2. *Если D—δ-образная функция и тройка точек q_1, q_2, q_3 допустима, то биповерхность (u, A) однозначно восстанавливается по трем своим D-образам $J(q_1, w)$, $J(q_2, w)$, $J(q_3, w)$ и значению функции u в произвольной точке области Ω.*

Рассмотрим один частный случай. Вектор-функцию $\mathbf{a}(p, q)$ определим формулой $\mathbf{a}(p, q) = q - p$, проектирующее отображение $F(q)$ — формулой

$$\underset{p \in T(q)}{F(q)(p)} = \left(\Phi \frac{q_1 - p_1}{q_3 - p_3},\ \Phi \frac{q_2 - p_2}{q_3 - p_3}\right), \quad p = (p_1, p_2, p_3), \quad q = (q_1, q_2, q_3),$$
$$\Phi = \text{const}.$$

Интеграл $(*)$ принимает в этом случае вид

$$J(q, w) = \iint\limits_{\Gamma(u)} \frac{\tilde{A}(p)}{\|q - p\|} (q - p, \mathbf{n}(p)) D(p, q, w)\, dS;$$

здесь $\|q - p\|$ — норма вектора $q - p$.

Переходя к двойному интегралу по области Ω, получаем

$$J(q, w) =$$
$$= \iint\limits_{\Omega} \frac{\tilde{A}(p)\left[(q_1 - x)\,\partial u/\partial x + (q_2 - y)\,\partial u/\partial y + (q_3 - u)\right]}{\sqrt{(q_1 - x)^2 + (q_2 - y)^2 + (q_3 - u)^2}} D(x, y, u(x, y), q, w)\, dx\, dy.$$

В указанном частном случае тройка точек q_1, q_2, q_3 будет допустимой, если эти точки не лежат на одной прямой, если q_1, q_2, $q_3 \in \omega(u)$ и график $\Gamma(u)$ функции u не пересекает плоскости, проходящей через эти точки.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
11 XI 1973