Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 531.35 **ФИЗИКА**

Б. Э. МЕЙЕРОВИЧ

О ПРЕДЕЛЬНЫХ УГЛАХ ОТКЛОНЕНИЯ ЧАСТИЦ ПРИ КЛАССИЧЕСКОМ РАССЕЯНИИ НА ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

(Представлено академиком И. М. Лифшицем 23 VII 1973)

Методами субмиллиметровой диагностики плазмы можно определить плазменную частоту ω_0 и, следовательно, измерить концентрацию электронов в плазме [1]. Если характерный размер плазмы a много больше длины волны $\lambda \sim c/\omega_0$ рассеиваемого излучения, $a\omega_0/c \gg 1$, то рассеяние носит геометрооптический характер и описывается теми же формулами, что и рассеяние классических частиц в заданном внешнем поле.

Ниже рассматривается классическое рассеяние частиц на ограниченном центрально-симметричном потенциале отталкивания $U(r)$, убывающем при удалении от центра (рис. 1). Показано, что частицы, энергия E которых больше максимального значения потенциала U_0, отклоняются на угол, не превышающий определенного предельного значения, зависящего от поведения потенциала вблизи центра.

Как известно, при $E > U_0$ и $E < U_0$ рассеяние частиц происходит по-разному. При $E < U_0$ все углы отклонения χ, $0 < \chi \leqslant \pi$, являются классически достижимыми. Если же $E > U_0$, то угол отклонения частицы $\chi(\rho, E)$ в зависимости от прицельного расстояния ρ стремится к нулю как при $\rho \to \infty$, так и при $\rho \to 0$, и при некотором значении $\rho = \rho_0(E)$ принимает максимальное значение $\chi_0(E) = \chi(\rho_0, E)$.

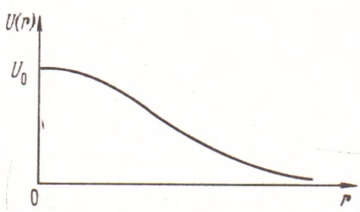

Рис. 1

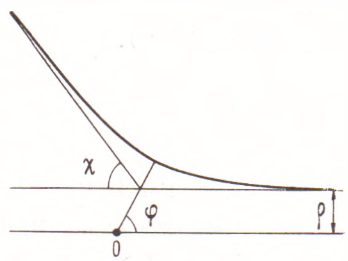

Рис. 2

Угол отклонения частицы $\chi(\rho, E)$ при рассеянии на центрально-симметричном потенциале $U(r)$ дается формулой (рис. 2)

$$\chi(\rho, E) = \pi - 2\varphi(\rho, E),$$

где $\varphi(\rho, E)$ определяется интегралом [2]

$$\varphi(\rho, E) = \int\limits_{r_m}^{\infty} \frac{\rho\, dr}{r^2} \left[1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{E} \right]^{-1/2}, \tag{1}$$

а r_m — минимальное расстояние от центра до траектории — находится из уравнения

$$1 - \frac{\rho^2}{r_m^2} - \frac{U(r_m)}{E} = 0. \tag{2}$$

Для наших целей удобно выразить прицельное расстояние ρ через r_m и E и считать r_m и E независимыми параметрами. Находя из (2) $\rho = r_m[1-U(r_m)/E]^{1/2}$ и подставляя в (1), имеем

$$\chi(r_m, E) = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{r_m\,dr}{r^2}\left[\frac{E-U(r)}{E-U(r_m)} - \frac{r_m^2}{r^2}\right]^{-1/2}. \tag{3}$$

Покажем, что при $\rho=\rho_0(E)$ частная производная $\partial\chi(r_m, E)/\partial r_m$ обращается в нуль. Поскольку при $\rho=\rho_0(E)$ функция $\chi(\rho, E)$ максимальна,

$$\frac{\partial\chi}{\partial\rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho=\rho_0(E).$$

Но χ зависит от ρ посредством $r_m(\rho)$. Поэтому

$$\frac{\partial\chi}{\partial\rho} = \frac{\partial\chi(r_m, E)}{\partial r_m}\frac{\partial r_m}{\partial\rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho=\rho_0(E). \tag{4}$$

Если $U(r)$ — монотонная функция, то $U'=dU/dr\leqslant 0$. Поэтому при $\rho>0$ производная

$$\frac{\partial r_m}{\partial\rho} = \frac{2\rho}{r_m^2}\left[\frac{2\rho^2}{r_m^3} - \frac{U'(r_m)}{E}\right]^{-1}$$

не обращается в нуль. Таким образом, из (4) следует, что

$$\frac{\partial\chi(r_m(\rho_0), E)}{\partial r_m} = 0.$$

Покажем теперь, что при $E>U_0$ при рассеянии на монотонном потенциале максимальный угол отклонения $\chi_0(E)$ монотонно убывает с ростом E. Поскольку $\partial\chi(r_m(\rho_0), E)/\partial r_m=0$, полная производная $d\chi_0(E)/dE$ равна частной производной

$$\frac{\partial\chi_0(E)}{dE} = \frac{\partial\chi(r_m(\rho_0), E)}{\partial E}.$$

Дифференцируя (3), получаем

$$\frac{d\chi_0(E)}{dE} = \frac{r_m}{[E-U(r_m)]^2}\int_{r_m}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\left[\frac{E-U(r)}{E-U(r_m)} - \frac{r_m^2}{r^2}\right]^{-3/2}[U(r)-U(r_m)]<0,$$

так как $U(r)<U(r_m)$. Таким образом, угол отклонения частицы не превосходит соответствующего значения при $E=U_0$.

Рассмотрим зависимость χ от ρ при $E=U_0$. После дифференцирования находим (удобно ввести $x=r_m/r$, а после дифференцирования снова вернуться к переменной r):

$$\frac{\partial\chi(\rho, U_0)}{\partial\rho} = -\frac{\partial r_m}{\partial\rho}\int_{r_m}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\frac{U_0-U(r)}{U_0-U(r_m)}\left[\frac{U_0-U(r)}{U_0-U(r_m)} - \frac{r_m^2}{r^2}\right]^{-3/2}[f(r_m)-f(r)], \tag{5}$$

где

$$f(r) = -\frac{rU'(r)}{U_0-U(r)} = \frac{d\ln(U_0-U(r))}{d\ln r} \tag{6}$$

Из (5) следует, что угол отклонения частиц при $E=U_0$ монотонно зависит от прицельного расстояния, по крайней мере, если функция $f(r)$ монотонна. Условие монотонности функции $f(r)$ является достаточным условием знакопостоянства интеграла (5), но, вообще говоря, не является необходимым. Мы, однако, ограничимся рассмотрением потенциалов $U(r)$, удовлетворяющих условию монотонности функции (6). Отметим, что этому условию удовлетворяют, например, потенциалы вида

$$U_0 \exp(-\alpha r^{\mu}), \quad U_0(1+\alpha r^{p})^{-\mu}, \quad U_0[1-\exp(-\alpha r^{-\mu})],$$

где α, μ и p — положительные константы.

Поскольку при любом конечном ρ функция $\chi(\rho, E)$ непрерывна по E при $E=U_0$, для нахождения максимального угла рассеяния можно в (1) положить $E=U_0$ и вычислять интеграл при малом, но конечном ρ. При этом основной вклад в интеграл дают малые r, и нам достаточно знать поведение $U(r)$ вблизи центра. Если $U(r)$ стремится к U_0 при $r \to 0$ степенным образом:

$$U(r)=U_0(1-\alpha r^{2\nu}), \quad \nu>0, \quad r\to 0,$$

то для угла рассеяния при малых ρ имеем

$$\chi(\rho, U_0)=\pi-2\int\limits_{r_m}^{\infty} \frac{\rho\, dr}{r}[U_0\alpha r^{2(\nu+1)}-\rho^2]^{-1/2}. \tag{7}$$

Интеграл в (7) не зависит от ρ и равен $\frac{1}{2}\pi/(\nu+1)$ и, таким образом, для предельного угла рассеяния получаем

$$\chi_{\text{пред}}=\pi\nu/(\nu+1).$$

В частности, при $\nu=1$ угол отклонения частицы с $E>U_0$ не превышает значения $\pi/2$ ([3]).

Полученные результаты остаются в силе и в случае рассеяния на цилиндрически симметричном потенциале.

Автор благодарит акад. П. Л. Капицу, акад. И. М. Лифшица, чл.-корр. АН СССР Л. А. Вайнштейна и проф. Л. П. Питаевского за обсуждения и замечания.

Институт физических проблем
Академии наук СССР
Москва

Поступило
8 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *P. L. Kapitza, E. A. Tishchenko, V. G. Zatsepin,* Active Submillimetre Diagnostics of the Moving UHF Discharge in Deuterium at High Pressure, XI Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Prague, 1973. [2] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц,* Механика, «Наука», 1965, § 18. [3] *J. Shmoys,* J. Appl. Phys., v. 32, № 4, 698 (1961).