Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 513.731 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР А. В. ПОГОРЕЛОВ

ОЦЕНКА ГЛАВНЫХ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Пусть F — замкнутая выпуклая гиперповерхность в $(n+1)$-мерном эвклидовом пространстве, удовлетворяющая уравнению

$$f(R_1, R_2, \ldots, R_n) = \varphi(\xi), \tag{1}$$

где R_i — главные радиусы кривизны гиперповерхности в точке с внешней нормалью ξ. Рассматривается вопрос об априорной оценке главных радиусов кривизны гиперповерхности F.

Теорема 1. *Пусть функция f определена для $R_1, R_2, \ldots, R_n > 0$, симметрична по всем переменным R_i, неотрицательна и вогнута, т. е. $(\partial^2 f/\partial R_i \partial R_j)\lambda_i\lambda_j \leqslant 0$. Пусть*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} f(R, R, \ldots, R) = \alpha > 0.$$

Тогда для главных радиусов кривизны гиперповерхности, удовлетворяющей уравнению (1), *имеет место оценка*

$$R_i \leqslant \max \frac{1}{\alpha}(\varphi - \varphi''),$$

где φ'' — вторая производная функции φ по дуге большого круга на сферическом изображении гиперповерхности.

Доказательство. Сначала будем предполагать, что аргументы R_i функции f входят в нее через элементарные симметрические функции S_k. Когда теорема будет доказана, это ограничение будет снято.

Пусть радиус нормальной кривизны гиперповерхности достигает максимума в некоторой точке P. Введем в пространство прямоугольные декартовы координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ таким образом, чтобы плоскость $x_0 = 1$ касалась гиперповерхности в точке P и чтобы координатные направления $x_1, x_2, \ldots, x_n$ совпадали с главными направлениями. Будем предполагать, что направлению x_1 отвечает наибольший из радиусов кривизны R_1.

Пусть $H(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_0)$ — опорная функция гиперповерхности. Положим $h(x_1, \ldots, x_n) = H(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)$. Элементарные симметрические функции S_k главных радиусов кривизны R_i известным образом выражаются через функцию h и ее производные до второго порядка ([1]). Благодаря специализированному выбору системы координат в точке P $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$,

$$h_{ii} = R_i, \quad h_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j;$$

здесь индексами при h обозначается дифференцирование по соответствующим переменным x.

Введем в рассмотрение функцию

$$w = \frac{(1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{3/2}}{1 + x_2^2 + \ldots x_n^2} h_{11}. \tag{2}$$

Как показано в работе ([2]), эта функция достигает максимума в точке P и этот максимум равен R_1. Дифференцируя равенство (2) в точке P, где функция w достигает максимума, будем иметь

$$w_i = h_{11i} = 0, \tag{3}$$

$$w_{11} = (h_{11})_{11} + 3R_1 \leqslant 0, \quad w_{ii} = (h_{11})_{ii} + R_1 \leqslant 0, \quad i \neq 1.$$

Величины S_k на гиперповерхности являются функциями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Условимся обозначать дифференцирование по переменной x_1 штрихом. Для производных S_k' и S_k'' в работе ([1]) получены следующие выражения:

$$S_k' = \sum_i \frac{\partial S_k}{\partial R_i} h_{ii}', \tag{4}$$

$$S_k'' = \sum_i \frac{\partial S_k}{\partial R_i} (h_{11})_{ii} + (k+1) S_k - 2\frac{\partial S_{k+1}}{\partial R_1} + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 S_k}{\partial R_i \partial R_j} (h_{ii}' h_{jj}' - h_{ij}'^2). \tag{5}$$

Рассмотрим вторую производную f по x_1. Имеем

$$f'' = \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} S_k'' + \sum_{k,l} \frac{\partial^2 f}{\partial S_k \partial S_l} S_k' S_l'.$$

Подставляя сюда значения S_k' и S_k'' из формул (4), (5) и $(h_{11})_{ii}$ из формул (3), после преобразований получим

$$f'' = \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i} w_{ii} - \sum_i (R_1 - R_i) \frac{\partial f}{\partial R_i} +$$

$$+ \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} h_{ii}' h_{jj}' - \sum_{i,j,k} \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial R_i \partial R_j} h_{ij}'^2. \tag{6}$$

Так как функция f неотрицательна и вогнута, то $\partial f / \partial R_i > 0$. Поэтому первое слагаемое правой части формулы (6) неположительно. Из-за вогнутости функции f неположительно и третье слагаемое. Покажем, что последнее слагаемое тоже неположительно. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial R_i} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial R_i} = R_j \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial R_i \partial R_j} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_{k+1}}{\partial R_i \partial R_j},$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_j} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial R_j} = R_i \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial R_i \partial R_j} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_{k+1}}{\partial R_i \partial R_j}.$$

Отсюда

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial R_i \partial R_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial R_j} - \frac{\partial f}{\partial R_i} \right) \Big/ (R_i - R_j). \tag{7}$$

Принимая во внимание вогнутость и симметрию функции f по переменным R_i и R_j, из этой формулы заключаем, что последнее слагаемое правой части формулы (6) неположительно.

Дифференцирование f по x_1 в точке P можно заменить дифференцированием φ по дуге большого круга в направлении x_1. Таким образом, получается неравенство

$$\varphi'' \leqslant -\sum_i (R_1 - R_i) \frac{\partial f}{\partial R_i}. \tag{8}$$

Так как функция f неотрицательна и вогнута, то

$$\sum_k R_k \frac{\partial f}{\partial R_k} \leqslant f, \quad \sum_k \frac{\partial f}{\partial R_k} \geqslant \alpha.$$

Поэтому, усиливая неравенство (8), получим

$$\varphi'' \leqslant -\alpha R_1 + \varphi.$$

Отсюда $R_1 \leqslant (\varphi - \varphi'')/\alpha$, что и требовалось доказать.

Начиная доказательство, мы предполагали, что аргументы R_i функции f входят в нее через элементарные симметрические функции этих аргументов. Теперь мы освободимся от этого ограничения. Для этого аппроксимируем функцию f аналитической функцией $\bar{f}$, обладающей свойствами f (симметрия, неотрицательность и вогнутость), а гиперповерхность F — аналитической гиперповерхностью $\bar{F}$. По функции $\bar{f}$ и гиперповерхности $\bar{F}$ находим функцию $\bar{\varphi} = \bar{f}(\bar{F})$. Затем применяем полученную оценку и переходим к пределу $\bar{f} \to f$, $\bar{F} \to F$ в метрике C^4.

Теорема 2. *Пусть функция f переменных $R_1, R_2, \ldots, R_n$ задана при $R_i > 0$, симметрична и неубывающая по каждому из переменных. Пусть в области, определяемой неравенствами* $\min \varphi \leqslant f \leqslant \max \varphi$, *выполняются условия*

$$\partial f/\partial R_i \geqslant c' > 0, \quad d^2 f/(df)^2 \leqslant c'' < \infty.$$

Тогда для главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности, удовлетворяющей уравнению (1), *можно указать априорную оценку сверху.*

Теорема 2 является следствием теоремы 1. Достаточно заметить, что функция

$$f_1 = 1 - \exp(-c'' f)$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

22 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. В. Погорелов*, ДАН, т. 186, № 3 (1969). [2] *А. В. Погорелов*, ДАН, т. 181, № 4 (1968).