Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 513.88 **МАТЕМАТИКА**

В. Ф. ПТАК, В. С. РЕТАХ

АБСТРАКТНЫЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 1 X 1973)

В этой статье мы приводим необходимое и достаточное условие разрешимости уравнений типа $P'\eta=\xi$, $\eta\in F'$, $\xi\in E'$, где E и F — индуктивные пределы пространств Фреше, а P: $E\to F$ — непрерывное линейное отображение. В частном случае, когда $F=\mathscr{D}(\Omega_1)$, $E=\mathscr{D}(\Omega_2)$, где Ω_1, Ω_2 — области в $\mathbf{R}^n$, а P — оператор свертки, наш результат содержит результат Л. Хёрмандера ([1]). Менее точный результат более сложными методами получил В. Словиковский ([5]). Наше доказательство основано на аппроксимационной теореме из ([2]) и приводимом ниже предложении 1.2. Это предложение есть обобщение на метризуемые локально-выпуклые пространства соответствующего результата о нормированных пространствах ([3]), который был использован в статье ([4]) об индуктивных пределах банаховых пространств.

1.1. Через (F_0) обозначим класс всех метризуемых локально-выпуклых пространств. Пространства типа (F_0), будучи отделимыми, содержатся в своих пополнениях. Пусть X и Y — отделимые локально-выпуклые пространства и A — линейное (не обязательно непрерывное) отображение X в Y. Через $G(A)$ обозначим график A в произведении $X\times Y$, наделенный индуцированной топологией, через $G(A)\hat{}$ — замыкание этого графика в произведении пополнений $X\hat{}\times Y\hat{}$, через $G(A)^*$ — сопряженное к $G(A)$, наделенное образом сильной топологии из $(X\times Y)'$ при каноническом отображении $(X\times Y)'\to G(A)'$ и через $D(G(A)\hat{})$ — проекцию $G(A)\hat{}$ на $X\hat{}$. Если V — абсолютно выпуклая окрестность нуля в пространстве X, то через (X, V) обозначим полунормированное пространство X с функционалом Минковского множества V в качестве полунормы. Через (X', i) обозначим борнологическое усиление пространства X', наделенного сильной топологией.

1.2. Предложение. *Пусть E_1, E_2, E_3 — пространства класса (F_0), A: $E_1\to E_2$, T: $E_1\to E_3$ — непрерывные линейные отображения и V — абсолютно выпуклая окрестность нуля в E_1, не содержащая ненулевых подпространств. Через A_0: $(E_1, V)\to E_2$ и T_0: $(E_1, V)\to E_3$ обозначим линейные операторы, совпадающие с A и T как отображения линейных пространств.*

Рассмотрим операторы $\tilde{A}$: $G(T_0)\to E_2$, $\tilde{T}$: $G(T_0)\to E_3$, где $\tilde{A}([x, Tx])=A(x)$, $\tilde{T}([x, Tx])=T(x)$ для всех $x\in E_1$, операторы A^*: $(E_2', i)\to G(T_0)^*$, где $A^*(f)=\tilde{A}'(f)$ для всех $f\in E_2'$ (если $\tilde{A}$ непрерывен), и T: $(E_3', i)\to G(T_0)^*$, где $T^*(g)=\tilde{T}'(g)$ *для всех $g\in E_3'$.*

I. *Следующие условия равносильны:*

1^0) *Если $(x_n)\subset V$ и Tx_n (слабо) сходится к нулю, то Ax_n слабо сходится к нулю;*

2^0) $A'E_2'\subset T'E_3'+\varepsilon V^0$ *для каждого $\varepsilon>0$;*

3^0 а) $\tilde{A}$ *непрерывен,* б) $\operatorname{Ker} T^{*\prime}\subset\operatorname{Ker} A^{*\prime}$.

II. *При этом 3^0 а) влечет*

4^0) $D(G(T_0)\hat{})\subset D(G(A_0)\hat{})$.

Обратно, если каноническая проекция $G(A_0)\hat{}$ в $(E_1, V)\hat{}$ инъективна, то 4^0) влечет 3^0 а).

1.3. Следствие. *В обозначениях п. 1.2. предположим, что* $(E_1, V)^\frown$ *и* E_3 *рефлексивны. Если выполнено одно из условий* $1^0)-3^0)$, то $\operatorname{Ker}\tilde{T}^\frown \subset \operatorname{Ker}\tilde{A}^\frown$, где $\tilde{T}^\frown$ *и* $\tilde{A}^\frown$ — *распространения непрерывных операторов* $\tilde{T}$ *и* $\tilde{A}$ *на пополнения.*

Обратно, если выполнено условие 3^0 а) *и* $\operatorname{Ker}\tilde{T}^\frown \subset \operatorname{Ker}\tilde{A}^\frown$, *то выполнены условия* $1^0)-3^0)$. *Наконец, если выполнено условие* $4^0)$, *каноническая проекция* $G(A_0)^\frown$ *в* $(E_1, V)^\frown$ *инъективна и* $\operatorname{Ker}\tilde{T}^\frown \subset \operatorname{Ker}\tilde{A}^\frown$, *то выполнены условия* $1^0)-3^0)$.

2.1. Пусть $E = \varinjlim E_i$ — индуктивный предел последовательности пространств типа (F_0) такой, что E_i есть замкнутое подпространство в E_{i+1} *. Пусть F — подпространство в E и $F_i = F \cap E_i$, наделенному индуцированной из E_i топологией. Из теоремы 1′ в ([2]) немедленно вытекает

Предложение. $F' = (\varinjlim F_i)'$, *если и только если в каждом* E_k *существует абсолютно выпуклая окрестность нуля* V_k *такая, что* $V_k \subset V_{k+1}$ *и* $\forall i \exists j \forall k > j \forall \varepsilon > 0 \quad F_j^0 \subset F_k^0 + E_i^0 + \varepsilon V_k^0$, *где все поляры берутся в* E_k'.

3.1. Пусть H, E — отделимые локально-выпуклые пространства и $P\colon H \to E$ — непрерывное линейное отображение. Если P' сюръективно, то P инъективно. Кроме того иногда сюръективность P' влечет секвенциальную замкнутость $P(H)$, как показывает следующее

Предложение. *Пусть* H — *регулярный индуктивный предел* ** *возрастающей последовательности рефлексивных пространств Фреше* H_k, E *отделимо и* P — *непрерывное линейное отображение* H *в* E.

Тогда сюръективность P' *влечет секвенциальную замкнутость* $P(H)$.

3.2. Следующее предложение хорошо известно.

Предложение. *Пусть* $H = \varinjlim H_k$, $E = \varinjlim E_k$ — *строгие индуктивные пределы пространств Фреше и* $P\colon H \to E$ — *непрерывное линейное отображение.*

Для каждого i *существует* j *такое, что* $P(H_i) \subset E_j$. *Если* P *инъективно и* $P^{-1}\colon P(H) \to H$ *секвенциально непрерывно, то для каждого* n *существует* m *такое, что* $P^{-1}(E_n) \subset H_m$. *Секвенциальная непрерывность* P^{-1} *равносильна секвенциальной замкнутости* $P(H)$.

3.3. Локально-выпуклое пространство X назовем проективно рефлексивным, если в нем существует фундаментальная система абсолютно выпуклых окрестностей нуля (U_α) такая, что отделимое пополнение $(X, U_\alpha)^\frown$ полунормированного пространства (X, U_α) рефлексивно для каждого α.

Из предыдущих результатов вытекает

Теорема. *Пусть* $H = \varinjlim H_k$, $E = \varinjlim E_k$ *строгие индуктивные пределы пространств Фреше,* $P\colon H \to E$ — *инъективное непрерывное линейное отображение,* P^{-1} *секвенциально непрерывно, а на пространстве* $P(H)$, *наделенном индуцированной из* E *топологией, существует непрерывная норма. Наделим пространства* $P^{-1}(E_k)$ *индуцированной из* H *топологией. Через* $T_{k,i}$, $k > i$, *обозначим композицию* $P \mid P^{-1}(E_k)$ *и фактор-отображения* $E_k \to E_k / E_i$, *а через* $A_{k,j}$ — *фактор-отображение* $P^{-1}(E_k) \to P^{-1}(E_k) / P^{-1}(E_k) \cap H_j$.

I. *Если* P' *сюръективно, то в* E *существует абсолютно выпуклая окрестность нуля* U, *такая, что для каждого* i *существует* j *такое, что для каждого* $k > i$ *операторы* $A_{k,j}$ *и* $T_{k,i}$ *и окрестность нуля* $P^{-1}(E_k \cap U)$ *в* $P^{-1}(E_k)$ *удовлетворяют условию* $1.2.3^0$ а).

II. *Если все* E_k *проективно рефлексивны,* E_k *замкнуто в* $(E_{k+1}, U \cap E_{k+1})$ *для каждого* k *и в* E *существует абсолютно выпуклая окрестность нуля* U *такая, что* $U \cap P(H)$ *не содержит ненулевых подпространств и для каждого* i *существует* j *такое, что для каждого* $k > i$ *операторы* $A_{k,j}$ *и* $T_{k,i}$ *и окрестность нуля* $P^{-1}(E_k \cap U)$ *в* $P^{-1}(E_k)$ *удовлетворяют условию* $1.2.4^0$, *то* P' *сюръективно.*

---

* Такие индуктивные пределы впредь будем называть строгими.

** Т. е. каждое ограниченное множество из H содержится и ограничено в некотором H_k.

4.1. Пусть Ω — область в эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^m$, а $\mathscr{D}(\Omega)$ — пространство всех финитных бесконечно дифференцируемых функций на Ω со стандартной топологией. Если возрастающая последовательность компактов (K_n) из Ω такова, что $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ для всех n и $\cup K_n = \Omega$, то $\mathscr{D}(\Omega) = \varinjlim \mathscr{D}(K_n)$.

Как известно, пространства $\mathscr{D}(K_n)$ полны и счетно-гильбертовы, а значит, проективно рефлексивны. Пусть $V \subset \mathscr{D}(\Omega)$, $V = \{\varphi \in \mathscr{D}(\Omega): \max\limits_{\Omega} |\varphi(x)| \leqslant 1\}$. Тогда $\mathscr{D}(K_n)$ замкнуто в $(\mathscr{D}(K_{n+1}), V \cap \mathscr{D}(K_{n+1}))$. Кроме того, V не содержит ненулевых подпространств, так что для любого подпространства F в $\mathscr{D}(\Omega)$ пространство $(F, F \cap V)$ нормированное.

Пусть μ — обобщенная функция на Ω. Через $\operatorname{sing\,supp} \mu$ обозначают носитель сингулярностей μ. Из теоремы 3.3 с использованием метода регуляризации легко выводится следующее усиление теоремы Хёрмандера [1].

Теорема. *Пусть* Ω_1, Ω_2 — *области в* $\mathbf{R}^m$, S — *обобщенная функция с компактным носителем в* $\mathbf{R}^m$, P: $\mathscr{D}(\Omega_1) \to \mathscr{D}(\Omega_2)$ — *непрерывный линейный оператор, определенный формулой* $P(\varphi) = S * \varphi$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. *Следующие условия равносильны:*

1°) P' *сюръективен;*

2°) P^{-1} *секвенциально непрерывен и для любого компакта* $K_2 \subset \Omega_2$ *существует компакт* $K_1 \subset \Omega_1$ *такой, что если* $\mu \in \mathscr{E}'(\Omega_1)$ и $\operatorname{sing\,supp} S * \mu \subset K_2$, *то* $\operatorname{sing\,supp} \mu \subset K_1$;

3°) P^{-1} *секвенциально непрерывен и для любого компакта* $K_2 \subset \Omega_2$ *существует компакт* $K_1 \subset \Omega_1$ *такой, что если* $\mu \in \mathscr{E}'(\Omega_1)$, $S * \mu$ *непрерывно и* $\operatorname{sing\,supp} S * \mu \subset K_2$, *то* $\operatorname{sing\,supp} \mu \subset K_1$.

В заключение авторы выражают благодарность Д. А. Райкову, который прочитал подробный вариант этой заметки и сделал ряд ценных замечаний.

Математический институт
Чехословацкой Академии наук

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
20 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. Хёрмандер*, Сборн. пер. Математика, т. 7, № 3 (1963). [2] *В. С. Ретах*, ДАН, т. 194, № 6 (1970). [3] *V. Pták*, Math. Ann., B. 163, № 1 (1966). [4] *V. Pták*, Čech. Math. J., v. 20, № 1 (1970). [5] *W. Słowikowski*, Math. Scand., v. 30, № 2 (1972).