Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 518:517.392 *МАТЕМАТИКА*

М. Д. РАМАЗАНОВ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ РЕШЕТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 VII 1973)

1. Рассматриваемое нами банахово пространство получается замыканием конечных рядов Фурье

$$f(x)=\sum_k f_k e^{2\pi ikx},\quad x=(x_1,\dots x_n)\in R^n,\quad k=(k_1,\dots,k_n)\quad k_j=0,\pm1,\pm2,$$

в норме

$$\|f(x)\|_{\tilde B^m}=\|(1-\Delta)^{m/2}f(x)\|_{\tilde B^0},\tag{1}$$

где по определению

$$(1-\Delta)^{m/2}f(x)=\sum_k(1+|2\pi k|^2)^{m/2}f_k e^{2\pi ikx},$$

$$\|f(x)\|_{\tilde B^0}=\max(\max_{x,y}|y|^{-\gamma}|(1-\Delta)^{-\gamma/2}[f(x+y)-f(x)]|,|f_0|),$$

γ — некоторое число, $0<\gamma<1$.

Область Ω должна обладать кусочно-непрерывно дифференцируемой границей и помещаться целиком внутри куба $Q=\{x|0\leqslant x_j<1,\ j=1,\dots,n\}$, $\rho(\Omega, R^n\setminus Q)>0$.

Определим пространство $\tilde B^m(\Omega)$ как множество функций $f(x)$, заданных на Ω, являющихся ограничениями на Ω некоторых функций из $\tilde B^m$ и обладающих конечной нормой

$$\|f(x)\|_{\tilde B^m(\Omega)}=\inf\|g(x)\|_{\tilde B^m},\quad g(x)\in\tilde B^m,\quad g(x)|_\Omega=f(x).\tag{2}$$

Сопряженное к $\tilde B^m(\Omega)$ пространство обозначим $[\tilde B^m(\Omega)]^*$.

При любом выборе $\gamma\in(0,1)$ пространство $\tilde B^m(\Omega)$, с точностью до эквивалентной нормировки, совпадает с обычными гёльдеровыми классами определенных на Ω функций, заданными, например, как множество функций с конечной нормой [1]

$$\|f(x)\|_{C^m(\Omega)}=\max_{x\in\bar\Omega}|f(x)|+\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=[m]-1}\max_{x\in\bar\Omega}\left|\Gamma^{m-[m]+1}\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}f(x)\right|,$$

где

$$\Gamma^\delta g(x)=\max_{x+y,\ x+2y\in\bar\Omega}|y|^{-\delta}|g(x)-2g(x+y)+g(x+2y)|,\quad 1\leqslant\delta<2.$$

На функциях из пространства $\tilde B^m(\Omega)$ мы рассматриваем задачу наилучшего приближения интеграла $\int_\Omega f(x)\,dx$ решетчатой кубатурной формулой вида

$$h^n\sum_{k;\ kh\in\Omega}c_k(h)f(kh),$$

$c_k(h)$ — некоторые числа, которые называются весами, h — малый параметр, $h\in\mathscr{H}=\{h\,|\,h\to+0,\ 1/h$ — целые числа$\}$.

Точнее задача ставится так. Разность интеграла и кубатурной формулы рассматривается как значение на $f(x)$ обобщенной функции

$$l_h^\Omega(x)=\chi_\Omega(x)-h^n\sum_{k;\ kh\in\Omega}c_k(h)\delta(x-kh),$$

где $\chi_\Omega(x)=1$ на Ω и $\chi_\Omega(x)=0$ вне Ω, δ — обобщенная δ-функция. Последовательность $\{l_h^\Omega(x)\}_{h\in\mathscr{H}}$ называется *функционалом погрешности*.

Если в формуле для $l_h^\Omega(x)$ суммирование производится по множеству $\{k\,|\,\rho(kh,\Omega)<Lh\}$ с постоянной L, не зависящей от $h\in\mathscr{H}$, то $\{l_h^\Omega(x)\}_{h\in\mathscr{H}}$ называется *функционалом типа функционала погрешности* (т.ф.п.)

Наилучшими мы называем приближения, которые при каждом h дают минимальную норму $l_h^\Omega(x)$ в пространстве $[\tilde{B}^m(\Omega)]^*$. В работе получены достаточные условия того, что рассматриваемые приближения будут асимптотически наилучшими, т. е. построенная по этим приближениям последовательность норм $\{\|l_h^\Omega(x)\|_{[\tilde{B}^m(\Omega)]^*}\}_{h\in\mathscr{H}}$ имеет первый член асимптотики по $h\to0$, совпадающий с соответствующим членом для наилучших приближений.

2. Далее мы используем определения работы ([2]), добавив к ним два новых.

Пусть $\mathscr{W}$ обозначает какое-нибудь множество областей ω, лежащих в Q и обладающих кусочно-гладкими границами. Рассмотрим множество функционалов т.ф.п.

$$\{l_h^\omega(x)\}_{h\in\mathscr{H},\ \omega\in\mathscr{W}}. \tag{3}$$

Множество (3) назовем *множеством равномерно оптимальных по порядку над* $\tilde{W}_p^m$ функционалов т.ф.п., если оценка оптимальности по порядку (см. ([1]), ([2])) выполняется для всех $h\in\mathscr{H}$ и $\omega\in\mathscr{W}$ с постоянной C, не зависящей от $h\in\mathscr{H}$ и $\omega\in\mathscr{W}$. Такое множество функционалов обозначим $RO(m,p)$.

Множество (3) назовем *множеством квалифицированно оптимальных по порядку над* $\tilde{W}_p^m$ функционалов т.ф.п., если существуют такие не зависящие от $h\in\mathscr{H}$ и $\omega\in\mathscr{W}$ постоянная C и функция $\varphi(\tau)$ $(\tau\in R^1,\ \varphi(\tau)\to0$ при $\tau\to0)$, что выполняется

$$\|l_h^\omega(x)\|_{[\tilde{W}_p^m]^*}\leqslant c\varphi(|\omega|)h^m+o(h^m)$$

для всех $h\in\mathscr{H}$, $\omega\in\mathscr{W}$. Слагаемое $o(h^m)$ может зависеть от ω. Такое множество функционалов обозначим $KO(m,p)$.

Лемма 1. *Если*

$$\{l_h^\omega(x)\}_{h\in\mathscr{H},\,\omega\in\mathscr{W}}\subset\bigcap_{m\in[M_1,\,M_2]}RO(m,p),$$

то для любого $q>p$

$$\{l_h^\omega(x)\}_{h\in\mathscr{H},\,\omega\in\mathscr{W}}\subset\bigcap_{m\in[M_1,\,M_2]}KO(m,q).$$

Рассмотрим обобщенную функцию

$$\lambda(x)=\chi_Q(x)-\sum_{|k|\leqslant c}a_k\delta(x-k),$$

удовлетворяющую условиям

$$\langle\lambda(x),\ x^\alpha\rangle=0\quad\text{для}\quad|\alpha|\leqslant M. \tag{4}$$

Она называется «элементарным функционалом» ([3]). Для любого M можно указать такое C, чтобы система (4) относительно коэффициентов a_k была разрешима и, следовательно, элементарный функционал существовал.

Будем считать числа h и h_0 такими, что $1/h$, $1/h_0$, h_0/h — целые числа. Пусть $Qh_0(s)=\{x\,|\,s_jh_0\leqslant x_j<(s_j+1)h_0,\ j=1,\ldots,n\}$ и

$$l_h^{h_0}(x)=\sum_{kh\in Qh_0(0)}\lambda\left(\frac{x-kh}{h}\right).$$

Заметим, что $\{l_h^{h_0}(x)\}_{h\in\mathscr{H}}$ есть функционал т.ф.п.

Кроме того, над любым пространством функций $f(x)$, периодических с основным периодом Q,

$$l_h^1(x)=\sum_{kh\in Q}\lambda\left(\frac{x-kh}{h}\right)=\chi_Q(x)-h^n\sum_{kh\in Q}\delta(x-kh).$$

Лемма 2. Для $m\in(n/2,M)$

$$\|l_h^{h_0}(x)\|_{[\tilde{B}^m]^*}=h_0^n\|l_h^1(x)\|_{[\tilde{B}^m]^*}(1+o(1))\quad\text{при } h\to 0. \tag{5}$$

Теорема. *Если*

$$\{l_h^\Omega(x)\}_{h\in\mathscr{H}}\in\Big[\bigcup_{p<2}\ \bigcap_{m\in[M_1,M_2]}O(m,p)\Big]\cap R(L_1,L_2), \tag{6}$$

то $\{l_h^\Omega(x)\}_{h\in\mathscr{H}}$ *— асимптотически оптимальный функционал погрешности над пространством* $\tilde{B}^m(\Omega)$ *для* $m\in[M_1,M_2)$.

3. Доказательство теоремы. Над пространством $\tilde{B}^m(\Omega)$ любой функционал $\{l_h^\Omega(x)\}_{h\in\mathscr{H}}$ оценивается снизу так ([4]):

$$\|l_h^\Omega(x)\|_{[\tilde{B}^m(\Omega)]^*}\geqslant|\Omega|\cdot\|l_h^1(x)\|_{[\tilde{B}^m]^*}(1+o(1)),\quad h\to 0. \tag{7}$$

Идея доказательства * теоремы состоит в том, что для функционалов (7) мы можем получить такую же оценку сверху:

$$\|l_h^\Omega(x)\|_{[\tilde{B}^m(\Omega)]^*}\leqslant|\Omega|\,\|l_h^1(x)\|_{[\tilde{B}^m]^*}(1+o(1)),\quad h\to 0. \tag{8}$$

Ясно, что из (7), (8) и следует асимптотическая оптимальность.

Рассмотрим $\Omega_{h_0}=\bigcup_{\rho(Qh_0(s),\,R^n\setminus\Omega)>h_0}Qh_0(s)$. Отметим, что $|\Omega\setminus\Omega_{h_0}|\to 0$ при $h_0\to 0$. Положим

$$l_h^{\Omega_{h_0}}(x)=\sum_{Qh_0(s)\subset\Omega_{h_0}}l_h^{h_0}(x-sh_0),\quad l_h^{\Omega\setminus\Omega_{h_0}}(x)=l^\Omega{}_h(x)-l_h^{\Omega_{h_0}}(x),$$

$$\|l_h^\Omega(x)\|_{[\tilde{B}^m(\Omega)]^*}=\|l_h^\Omega(x)\|_{[\tilde{B}^m]^*}\leqslant\|l_h^{\Omega_{h_0}}(x)\|_{[\tilde{B}^m]^*}+\|l_h^{\Omega\setminus\Omega_{h_0}}(x)\|_{[\tilde{B}^m]^*}. \tag{9}$$

Имеем

$$\|l_h^{\Omega_{h_0}}(x)\|_{[\tilde{B}^m]^*}\leqslant\sum_{Qh_0(s)\subset\Omega_{h_0}}\|l_h^{h_0}(x-sh_0)\|_{[\tilde{B}^m]^*}=$$
$$=|\Omega_{h_0}|\,\|l_h^1(x)\|_{[\tilde{B}^m]^*}\cdot(1+o(1)), \tag{10}$$

член $o(1)$ при $h\to 0$ может зависеть от h_0.

Ниже мы установим такую оценку с некоторой функцией $\varphi(\tau)$, $\tau\in R^1$, $\varphi(\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$,

$$\|l_h^{\Omega\setminus\Omega_{h_0}}(x)\|_{[\tilde{B}^m]^*}\leqslant C\varphi(|\Omega\setminus\Omega_{h_0}|)h^m+o(h^m), \tag{11}$$

причем C не зависит от h, h_0, а $o(h^m)$ может зависеть от h_0.

* Мы взяли ее из работ С. Л. Соболева, где она применяется в гильбертовых $\mathscr{L}_2^m$-пространствах.

Покажем сначала, как с помощью (11) завершить доказательство теоремы. Подставим (10), (11) в (9) и разделим обе части на $\|l_h^1(x)\|_{[\widetilde{B}^m]^*}=\psi(h)$:

$$\|l_h^\Omega(x)\|_{[\widetilde{B}^m]^*}/\psi(h)\leqslant|\Omega|(1+o(1))+(|\Omega|-|\Omega_{h_0}|)\cdot(1+o(1))+$$
$$+C'\varphi(|\Omega\backslash\Omega_{h_0}|)+o(1).$$

Устремив h к нулю, получаем

$$\overline{\lim_{h\to0}}\|l_h^\Omega(x)\|_{[\widetilde{B}^m]^*}/\psi(h)\leqslant|\Omega|+[|\Omega\backslash\Omega_{h_0}|+C'\varphi(|\Omega\backslash\Omega_{h_0}|)].$$

Левая часть неравенства не зависит от h_0, а в правой части квадратная скобка становится сколь угодно малой при малых h_0. Значит, оценка выполняется и без этой скобки:

$$\overline{\lim_{h\to0}}\|l_h^\Omega(x)\|_{[\widetilde{B}^m]^*}/\psi(h)\leqslant|\Omega|.$$

Отсюда и следует (8).

Займемся свойством (11). Известно ([4]), что если при построении $\lambda(x)$ взять $M\geqslant M_2$, то

$$\{l_h^{\Omega_{h_0}}(x)\}_{h\in\mathscr{H},\,h_0\to0}\subset\bigcap_{\substack{m\in(n/p,M_2],\\ p<\infty}}RO(m,p)\cap R(L_1,L_2).$$

Поэтому

$$\{l_h^{\Omega\backslash\Omega_{h_0}}(x)\}_{h\in\mathscr{H},\,h_0\to0}\subset[\bigcup_{p<2}\bigcap_{m\in[M_1,M_2]}RO(m,p)]\cap R(L_1,L\ ).$$

Тогда из леммы 1 следует, что

$$\{l_h^{\Omega\backslash\Omega_{h_0}}(x)\}_{h\in\mathscr{H},\,h_0\to0}\subset\bigcap_{m\in[M_1,M_2)}KO(m,2)\cap R(L_1,L_2),$$

т. е. с некоторой функцией $\varphi(\tau)$, $\varphi(\tau)\to0$ при $\tau\to0$,

$$\|l_h^{\Omega\backslash\Omega}(x)\|_{[\widetilde{W}_2^m]^*}\leqslant C\varphi(|\Omega\backslash\Omega_{h_0}|)h^m+o(h^m)\quad\text{для}\quad m\in[M_1,M_2).$$

Но $\widetilde{W}_2^m=\widetilde{B}_2^m\supset\widetilde{B}^m$ ([1]). Поэтому

$$\|l_h^{\Omega\backslash\Omega}(x)\|_{[\widetilde{B}^m]^*}\leqslant C_1\|l_h^{\Omega\backslash\Omega}(x)\|_{[\widetilde{W}_2^m]^*}\leqslant C_2\varphi(|\Omega\backslash\Omega_{h_0}|)h^m+o(h^m),$$

что и требовалось показать.

Башкирский государственный университет
им. 40-летия Октября
Уфа

Поступило
12 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. М. Никольский*, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. [2] *М. Д. Рамазанов*, ДАН, т. 216, № 1 (1974). [3] *С. Л. Соболев*, Лекции по теории кубатурных формул, ч. 1, ч. 2, Новосибирск, 1964, 1965. [4] *М. Д. Рамазанов*, Лекции по теории приближенного интегрирования, Уфа, 1973.