Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 519.4 *МАТЕМАТИКА*

А. Ю. СОЙФЕР

О НЕПРИВОДИМЫХ СИСТЕМАХ ОБРАЗУЮЩИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 X 1973)

Система образующих S группы G называется неприводимой, если никакая ее собственная подсистема уже не является для G системой образующих.

Целью настоящего сообщения является решение следующего вопроса. Пусть последовательность абелевых групп

$$G_1 \overset{\lambda}{\rightarrowtail} G \overset{\tau}{\twoheadrightarrow} G_2 \qquad (*)$$

точна. Какие существуют связи между существованием неприводимой системы образующих (н.с.о.) у группы G и групп G_1, G_2?

Символом $t(G)$ будем обозначать периодическую часть группы G; P — множество простых чисел. Нам потребуется основной результат доклада [2] и лемма из статьи [1]:

Теорема 1 ([2], теорема 1). *Пусть G — абелева группа. Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *G имеет неприводимую систему образующих,*

2) *G удовлетворяет хотя бы одному из условий:*

а) *G — конечно-порожденная группа;*

б) *существует простое число p такое, что для периодической части $t(G)$ группы G справедливо равенство*

$$|t(G)/pt(G)| = |G|;$$

в) *для каждого фактора $\bar{G}=G/G_1$ группы G по конечно-порожденной подгруппе G_1 и каждого простого числа q справедливо равенство*

$$\sum_{p\in P\setminus\{q\}} (|\bar{G}/p\bar{G}|-1) = |G|.$$

3) *G удовлетворяет хотя бы одному из условий:*

а) *G — конечно-порожденная группа;*

б) *$t(G)$ имеет прямое слагаемое, равномощное G и разложимое в прямую сумму циклических подгрупп, примарных по одному простому p;*

в) *G имеет эпиморфный образ, равномощный G и разложимый в прямую сумму конечных непримарных циклических подгрупп.*

Замечание 1. Для бесконечной группы G эквивалентны условия 2б) и 3б), а также условия 2в) и 3в).

Лемма 1 ([1], предложение 4). *Пусть G_1 — конечно-порожденная подгруппа абелевой группы G. G имеет н.с.о. тогда и только тогда, когда н.с.о. имеет G/G_1.*

Лемма 2. *Пусть $G_1 \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G_2$ — короткая точная последовательность. Тогда для любого простого числа p*

$$|G_2/pG_2| \leqslant |G/pG| \leqslant |G_1/pG_1| \cdot |G_2/pG_2|. \qquad (1)$$

В частности, если $|G/pG| \geqslant \aleph_0$ и $|G/pG| > |G_1|$, то

$$|G/pG| = |G_2/pG_2|. \qquad (2)$$

Докажем основной результат настоящего сообщения.

Т е о р е м а 2. *Пусть последовательность* $G_1 \overset{\lambda}{\rightarrowtail} G \overset{\tau}{\twoheadrightarrow} G_2$ *абелевых групп точна и* $|G_1| \neq |G_2|$. *Группа* G *имеет неприводимую систему образующих тогда и только тогда, когда неприводимую систему образующих имеет бо́льшая по мощности из групп* G_1, G_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С л у ч а й 1.

$$|G_1| < |G_2|. \tag{3}$$

В силу теоремы 1 и замечания 1 группа имеет н.с.о. тогда и только тогда, когда она удовлетворяет хотя бы одному из условий 2а), 2б), 3в) теоремы 1. Следовательно, в рассматриваемом случае нам достаточно показать, что G удовлетворяет хотя бы одному из условий 2а), 2б), 3в) тогда и только тогда, когда хотя бы одному из условий 2а), 2б), 3в) удовлетворяет G_2.

Очевидно, G — конечно-порожденная группа тогда и только тогда, когда G_2 — конечно-порожденная группа.

Считаем далее, что G и G_2 — не конечно-порожденные группы. Тогда, используя (3), нетрудно показать, что G имеет эпиморфный образ, равномощный G и разложимый в прямую сумму конечных непримарных циклических подгрупп тогда и только тогда, когда G_2 имеет эпиморфный образ, равномощный G_2 и разложимый в прямую сумму конечных непримарных циклических подгрупп. Итак, нам достаточно доказать, что $|t(G)/pt(G)| = |G|$ тогда и только тогда, когда $|t(G_2)/pt(G_2)| = |G_2|$.

Построим коммутативную диаграмму (Д$_1$) с точными столбцами и строками:

$$\begin{tikzcd}
t(G)\cap G_1' \arrow[r, tail, "1"] \arrow[d, tail, "1"'] & G_1' \arrow[r, two heads, "x"] \arrow[d, tail, "1"'] & xG_1' \arrow[d, tail, "1"'] \\
t(G) \arrow[r, tail, "1"] \arrow[d, two heads, "\tau_1"'] & G \arrow[r, two heads, "x"] \arrow[d, two heads, "\tau"'] & G/t(G) \arrow[d, two heads, "\tau_2"'] \\
T_1 \arrow[r, tail, "\mu"] & G_2 \arrow[r, two heads, "\sigma"] & H
\end{tikzcd} \tag{Д$_1$}$$

В диаграмме мы обозначили: $G_1' = \lambda G_1$; $T_1 = t(G)/[t(G)\cap G_1']$; $H = [G/t(G)]/xG_1'$.

Третья строка диаграммы индуцирует точную последовательность

$$T_1 \overset{\mu^*}{\rightarrowtail} t(G_2) \overset{\sigma^*}{\twoheadrightarrow} t(H). \tag{4}$$

Очевидно $t(H) \cong \langle xG_1' \rangle_* / xG_1'$, где $\langle xG_1' \rangle_*$ — наименьшая сервантная подгруппа группы $G/t(G)$, содержащая xG_1'; следовательно,

$$|t(H)| \leqslant |G_1|. \tag{5}$$

Из (4), (5), (3) следует, что можно выбрать подгруппу T_2 группы $t(G_2)$ такую, что $\sigma^* T_2 = t(H)$ и

$$|T_2| \leqslant |G_1|. \tag{6}$$

Обозначим $\mu^* T_1 = T_1'$. В силу теоремы об изоморфизме

$$t(G_2)/T_2 \cong T_1'/(T_1' \cap T_2). \tag{7}$$

Пусть $|t(G)/pt(G)| = |G|$, тогда $|t(G)\cap G_1'| < |t(G)/pt(G)|$, и в силу леммы 2 (см. первый столбец (Д$_1$))

$$|T_1/pT_1| = |G|. \tag{8}$$

Из (6), (3), (8) следует, что

$$|T_1' \cap T_2| < |T_1'/pT_1'| = |G|,$$

следовательно, в силу леммы 2,

$$|[T_1'/(T_1'\cap T_2)]/p[T_1'/(T_1'\cap T_2)]|=|G|,$$

т. е. ввиду (7)

$$|[t(G_2)/T_2]/p[t(G_2)/T_2]|=|G|,$$

откуда следует, в силу леммы 2, что

$$|t(G_2)/pt(G_2)|=|G_2|.$$

Обратно, пусть $|t(G_2)/pt(G_2)|=|G_2|$, тогда из (3) и (6) следует, что

$$|T_2|<|t(G_2)/pt(G_2)|=|G_2|,$$

следовательно, в силу леммы 2,

$$|[t(G_2)/T_2]/p[t(G_2)/T_2]|=|G_2|,$$

т. е. ввиду (7)

$$|[T_1'/(T_1'\cap T_2)]/p[T_1'/(T_1'\cap T_2)]|=|G_2|. \tag{9}$$

Так как $T_1'/(T_1'\cap T_2)$ — эпиморфный образ группы T_1, а T_1 — эпиморфный образ группы $t(G)$, то из (9) в силу леммы 2 следует, что

$$|t(G)/pt(G)|\geqslant|G_2|.$$

Так как G_2 — не конечно-порожденная группа, то ввиду (3) $|G_2|=|G|$, следовательно,

$$|t(G)/pt(G)|=|G|.$$

Случай 2. $|G_1|>|G_2|$ и G_2 — конечно-порожденная группа.

Выберем конечно-порожденную подгруппу G_2' группы G такую, что $\tau G_2'=G_2$. Очевидно, $G/G_2'\cong\lambda G_1/(\lambda G_1\cap G_2')$. Дважды применяя лемму 1, получаем: G имеет н.с.о. тогда и только тогда, когда н.с.о. имеет $G/G_2'\cong\lambda G_1/(\lambda G_1\cap G_2')$; $\lambda G_1/(\lambda G_1\cap G_2')$ имеет н.с.о. тогда и только тогда, когда н.с.о. имеет G_1.

Случай 3. $|G_1|>|G_2|$ и G_2 — не конечно-порожденная группа.

Выберем подгруппу G_2' группы G такую, что $\tau G_2'=G_2$ и $|G_2'|=|G_2|$. В силу теоремы об изоморфизме

$$G/G_2'\cong\lambda G_1/(\lambda G_1\cap G_2'). \tag{10}$$

Очевидно, $|G_2'|<|G/G_2'|$ и $|\lambda G_1\cap G_2'|<|\lambda G_1/(\lambda G_1\cap G_2')|$. Дважды применяя уже доказанный случай 1 и используя (10), получаем: G имеет н.с.о. тогда и только тогда, когда н.с.о. имеет G/G_2'; $G/G_2'\cong\lambda G_1/(\lambda G_1\cap G_2')$; $\lambda G_1/(\lambda G_1\cap G_2')$ имеет н.с.о. тогда и только тогда, когда н.с.о. имеет G_1.

Теорема доказана.

Предположение о неравномощности групп G_1 и G_2 существенно, ни одна из двух импликаций теоремы 2 не справедлива в предположении, что группы G_1 и G_2 равномощны.

Теорема 3. *Для любого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$ существуют абелевы группы G_1 и G_2, удовлетворяющие следующим условиям:*

а) $|G_1|=|G_2|=\mathfrak{m}$,

б) *G_1 и G_2 не имеют неприводимые системы образующих,*

в) *прямая сумма $G=G_1+G_2$ имеет неприводимую систему образующих.*

Теорема 4. *Для любого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$ существует точная последовательность $G_1 \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G_2$ абелевых групп мощности $\mathfrak{m}$, таких, что группы G_1 и G_2 имеют неприводимые системы образующих, однако группа G не имеет неприводимой системы образующих.*

Из теоремы 3 следует, что при $|G_1|=|G_2|$ из существования н.с.о. у группы G (см. точную последовательность (*)) нельзя сделать вывода о существовании или отсутствии н.с.о. у групп G_1, G_2, даже если последовательность (*) расщепляема. Напротив, уже при дополнительном требовании сервантности вложения λ в точной последовательности (*) можно получить некоторые результаты, выводящие существование н.с.о. у группы G из существования н.с.о. у групп G_1, G_2.

Определение. Если последовательность $G_1 \overset{\lambda}{\rightarrowtail} G \overset{\tau}{\twoheadrightarrow} G_2$ абелевых групп точна и подгруппа λG_1 сервантна в G, то группа G называется **сервантным расширением группы** G_1 **с помощью группы** G_2.

Теорема 5. *Пусть несчетная абелева группа G является сервантным расширением группы G_1 с помощью группы G_2. Группа G имеет неприводимую систему образующих, если хотя бы одна из групп G_1, G_2 имеет неприводимую систему образующих и равномощна G.*

Требование несчетности в теореме 5 существенно, однако частично можно распространить теорему 5 на группы счетной мощности.

Теорема 6. *Пусть абелева группа G является сервантным расширением группы G_1 с помощью группы G_2. Если группа G_2 имеет бесконечную неприводимую систему образующих и равномощна G, то группа G также имеет неприводимую систему образующих.*

Теорема 7. *Класс всех абелевых групп, имеющих неприводимые системы образующих, замкнут относительно сервантных расширений.*

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступило 20 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Ю. Сойфер*, Сибирск. матем. журн., т. 3, 648 (1971). [2] *А. Ю. Сойфер*, Критерии существования неприводимых систем образующих у абелевых групп, IV Всесоюзн. симпозиум по теории групп, Новосибирск, 1973, стр. 213.