Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 517.512

МАТЕМАТИКА

П. Л. УЛЬЯНОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ $\varphi(L)$

(Представлено академиком С. М. Никольским 26 XII 1973)

1. Пусть Φ — множество всех конечных, четных, неотрицательных и неубывающих на полупрямой $[0, \infty)$ функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\varphi(\infty)=\infty$.

Если $\varphi(t)\in\Phi$, то через $\varphi(L)$ обозначается множество всех измеримых на отрезке $[0, 1]$ функций f, для каждой из которых

$$\int_0^1 \varphi(f(t))\,dt<\infty.$$

Для каждых двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из множества $\varphi(L)$ определим число

$$\rho_\varphi(f_1, f_2)\equiv\int_0^1 \varphi(f_1(t)-f_2(t))\,dt,$$

которое назовем обобщенным φ-расстоянием между f_1 и f_2. Это расстояние может быть, вообще говоря, равным и бесконечности для некоторых элементов f_1 и f_2.

Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ с $f_n\in\varphi(L)$, $n\geqslant1$, назовем сходящейся по φ-расстоянию к элементу $F\in\varphi(L)$, если $f_n-F\in\varphi(L)$ при $n\geqslant N$, где N — некоторое натуральное число, и $\rho_\varphi(f_n, F)\to0$ при $n\to\infty$.

Далее, пусть

$$A_\varphi(F, \varepsilon)\equiv\{f\colon f\in\varphi(L),\ \rho_\varphi(f, F)<\varepsilon\}$$

— ε-окрестность элемента F, где ε — некоторое положительное число, а $F\in\in\varphi(L)$.

На основе окрестностей $A_\varphi(F, \varepsilon)$ в множестве $\varphi(L)$ можно ввести топологию и тем самым определить топологическое пространство U_φ так, чтобы совокупность окрестностей $\{A_\varphi(F, \varepsilon)\}$ (при произвольных числах $\varepsilon>0$ и любых функциях $F\in\varphi(L)$) была предбазой пространства U_φ. Более подробно об этом сказано в работах [2] и [3].

Ранее нами были установлены [2, 3] некоторые аппроксимативные и топологические свойства классов функций $\varphi(L)$ и пространства U_φ. В частности, были найдены необходимые и достаточные условия, когда множество $\varphi(L)$ сепарабельно относительно φ-расстояния (или когда сепарабельно топологическое пространство U_φ).

Предлагаемая статья является продолжением указанных выше работ.

2. Хорошо известно, что если последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ с $f_n\in L^p(0, 1)$ при $p\in[1, \infty]$ сходится в пространстве $L^p(0, 1)$ к некоторому элементу $F\in L^p(0, 1)$, т. е. $\|F-f_n\|_p\to0$ при $n\to\infty$, то это влечет

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(t)|^p\,dt=\int_0^1 |F(t)|^p\,dt. \tag{1}$$

Спрашивается, при каких условиях на функцию $\varphi \in \Phi$ из сходимости по φ-расстоянию последовательности $f_n \in \varphi(L)$, $n=1, 2, \ldots$, к $F \in \varphi(L)$ непременно следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi(f_n(t))\,dt = \int_0^1 \varphi(F(t))\,dt, \tag{2}$$

т. е. когда выполняется аналог равенства (1)?

Ответ на этот вопрос дает

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in \Phi$ *с* $\varphi(+0)=0$. *Тогда, чтобы из условий*

$$f_n \in \varphi(L) \text{ при } n \geqslant 1, \quad F \in \varphi(L) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \rho_\varphi(f_n, F) = 0$$

всегда вытекало равенство (2), *необходимо и достаточно выполнения трех условий:*

$$\text{функция } \varphi(t) \text{ непрерывна на } (0, \infty); \tag{3а}$$

$$\varphi(t) > 0 \text{ при всех } t > 0; \tag{3б}$$

$$\varphi(2t) = O\{\varphi(t)\} \text{ при } t \to \infty. \tag{3в}$$

Доказательство этого утверждения опирается, в частности, на то, что если нарушено одно из условий (3), то найдется последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{8}$ с $f_n \in \varphi(L)$ при $n=1, 2, \ldots$ такая, что для некоторой функции $F \in \in \varphi(L)$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_\varphi(F, f_n) = 0$, а модуль разности

$$\left| \int_0^1 \varphi(f_n)\,dt - \int_0^1 \varphi(F)\,dt \right| > A \quad \text{при всех} \quad n=1, 2, \ldots,$$

где A — некоторая положительная постоянная.

Далее, пусть функция φ удовлетворяет только условиям (3а) и (3в), а последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\rho_\varphi(f_n, F) \to 0$ и выполнено равенство (2). Не влечет ли это, что f_n сходится к F по топологии U_φ? Другими словами, если f_n сходится к F по φ-расстоянию и выполнено (2), то не сходится ли f_n к F по топологии U_φ?

В этом направлении имеет место

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in \Phi$ *и* $\varphi(+0)=0$. *Тогда, если* $\varphi(t+0) = \varphi(t)$ *при всех* $t \in (0, \infty)$ *и* $\varphi(2t) \neq O\{\varphi(t)\}$ *при* $t \to \infty$, *то найдется последовательность* $\{f_n\}$, *которая сходится по* φ*-расстоянию к* $F \in \varphi(L)$ *и для которой справедливо равенство* (2), *но, однако,* $\{f_n\}$ *не сходится по топологии* U_φ.

3. В этом параграфе мы изложим некоторые результаты, касающиеся сходимости по топологии U_φ.

Теорема 3. *Пусть функция* $\varphi \in \Phi$ *и* $\varphi(+0)=0$. *Тогда, чтобы сходимость по* φ*-расстоянию во множестве* $\varphi(L)$ *была эквивалентна сходимости по топологии* U_φ, *необходимо и достаточно выполнения трех условий:*

$$\begin{aligned} &\varphi(t+0) = \varphi(t) \quad \text{при всех} \quad t \in (0, \infty);\\ &\varphi(t) > 0 \quad \text{при всех} \quad t > 0;\\ &\varphi(2t) = O\{\varphi(t)\} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство этого утверждения опирается, в частности, на тот факт, что условия (4) необходимы и достаточны для того, чтобы пространство U_φ обладало свойством d (см. теорему 6.2 из работы [3]), т. е. чтобы для всякого элемента g из окрестности $A_\varphi(F, \varepsilon)$ нашлось число $\delta > 0$ такое, что

$$A_\varphi(g, \delta) \subset A_\varphi(F, \varepsilon).$$

Следующая теорема выясняет природу сходимости по топологии U_φ через сходимость по φ-расстоянию. Именно, имеет место

Теорема 4. *Пусть даны функция $\varphi\in\Phi$ с $\varphi(0)=0$, удовлетворяющая условиям:*

а) $\varphi(t)$ *непрерывна на* $[0, \infty)$;

б) $\varphi(t)>0$ *при всех* $t>0$,

функция $F\in\varphi(L)$ *и последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *с* $f_n\in\varphi(L)$ *при* $n\geqslant1$.

Тогда $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к* F *по топологии* U_φ *в том и только том случае, когда для всякого элемента* $g\in\varphi(L)$ *с* $F+g\in\varphi(L)$ *найдется такое натуральное число* N, *что* $f_n+g\in\varphi(L)$ *при* $n>N$ *и предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\varphi(f_n+g)\,dt=\int_0^1\varphi(F+g)\,dt. \tag{5}$$

Очевидно, что если $g=-F$, то равенство (5) сводится к определению сходимости f_n к F по φ-расстоянию, а если $g\equiv0$, то равенство (5) превращается в равенство (2). Ясно, что если $\varphi(t)=|t|^p$, $p\in[1, \infty)$, то равенство (5) выполняется для всякой функции $g\in L^p(0, 1)$ и всякой сходящейся в пространстве $L^p(0, 1)$ последовательности $\{f_n\}$. Отметим еще, что утверждение теоремы 4 (см. равенство (5)) указывает на «бедность» класса сходящихся по топологии U_φ последовательностей $\{f_n\}$ из нелинейного множества $\varphi(L)$, если функция $\varphi(t)$ ведет себя скачкообразно, и потому для этого случая более целесообразно рассматривать во множестве $\varphi(L)$ сходимость по φ-расстоянию.

4. В топологическом пространстве U_φ система окрестностей состоит из объединений (в любом числе) всевозможных конечных пересечений множеств вида $A_\varphi(F, \varepsilon)$, т. е. каждая окрестность A в пространстве U_φ имеет вид

$$A=\bigcup_{\alpha\in I}\bigcap_{i=1}^{n_\alpha}A_\varphi(F_i^{(\alpha)}, \varepsilon_i^{(\alpha)}), \tag{6}$$

где n_α — натуральные числа, I — какой-то набор индексов, функция $F_i^{(\alpha)}\in\in\varphi(L)$, а $\varepsilon_i^{(\alpha)}$ — положительные числа при $1\leqslant i\leqslant n_\alpha$ и всех $\alpha\in I$.

Топологическое пространство U_φ имеет счетную базу (или удовлетворяет второй аксиоме счетности (см. ([1]), стр. 72—75)), если существует в U_φ счетная система окрестностей $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ вида (6) такая, что для всякой окрестности A вида (6) и каждой точки $f\in A$ найдется число j_0, для которого $f\in A_{j_0}\subset A$.

Справедлива

Теорема 5. *Пусть функция* $\varphi\in\Phi$ *с* $\varphi(+0)=0$ *такова, что* $\varphi(t+0)=\varphi(t)>0$ *при всех* $t>0$. *Тогда, чтобы топологическое пространство* U_φ *имело счетную базу, необходимо и достаточно выполнения соотношения*

$$\varphi(2t)=O\{\varphi(t)\}\quad \text{при}\quad t\to\infty. \tag{7}$$

При этом, если выполнено соотношение (7), *то система окрестностей* $\{A_k^{(i)}\}=\{A_\varphi(P_k, 1/i)\}_{k=1,\ i=1}^{\infty}$ *образует счетную базу в* U_φ, *где* $\{P_k\}$ — *множество всех алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами.*

На основе изложенного выше (см. также ([2]) и ([3])) устанавливается утверждение.

Пусть функция $\varphi\in\Phi$ с $\varphi(+0)=0$ такова, что $\varphi(t+0)=\varphi(t)$ при всех $t>>0$. Тогда:

а) если $\varphi(2t)=O\{\varphi(t)\}$ при $t\to\infty$, то пространство U_φ имеет счетную базу и, тем более, оно сепарабельно;

б) если $\varphi(2t)\neq O\{\varphi(t)\}$ при $t\to\infty$, но $\varphi(t+1)=O\{\varphi(t)\}$ при $t\to\infty$, то пространство U_φ не имеет счетной базы, хотя оно сепарабельно (это влечет неметризуемость U_φ);

в) если $\varphi(t+1) \neq O\{\varphi(t)\}$ при $t \to \infty$, то пространство U_φ не является сепарабельным (так же как множество $\varphi(L)$ не является сепарабельным относительно φ-расстояния);

г) если $\varphi(2t) \neq O\{\varphi(t)\}$ при $t \to \infty$, то всякое множество окрестностей

$$\{A_\beta\}_{\beta \in J} = \{ \bigcup_{\alpha \in I_\beta} \bigcap_{i=1}^{n_{\alpha,\beta}} A_\varphi(\psi_i^{(\alpha,\beta)}, \varepsilon_i^{(\alpha,\beta)}) \}_{\beta \in J}$$

не образует базы в U_φ, где J и I_β, $\beta \in J$,— произвольные наборы индексов, $n_{\alpha,\beta}$ — произвольные натуральные числа, $\varepsilon_i^{(\alpha,\beta)}$ — любые положительные числа, а $\psi_i^{(\alpha,\beta)}$ — любые ограниченные измеримые функции при $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, n_{\alpha,\beta}$ с $\alpha \in I_\beta$ и $\beta \in J$.

д) множество всех ограниченных измеримых на отрезке $[0, 1]$ функций образует плотное подмножество в пространстве U_φ для любой функции φ.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Дж. Л. Келли*, Общая топология, М., 1968. [2] *П. Л. Ульянов*, ДАН, т. 203, № 3, 34 (1972). [3] *П. Л. Ульянов*, УМН, т. 27, № 2, 3 (1972).