

М. Ш. БРАВЕРМАН, Е. М. СЕМЕНОВ

**ИЗОМЕТРИИ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ**

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 17 I 1974)

С. Банах <sup>(1)</sup> доказал, что всякая изометрия  $U$  пространства  $l_p^n$ ,  $p \neq 2$ , на себя имеет вид

$$(Ux)_i = \alpha_i x_{k_i}, \quad (1)$$

где  $\alpha_i = \pm 1$ ,  $i \rightarrow k_i$  — взаимно однозначное отображение множества  $\{i \leq n\}$ ,  $n \leq \infty$ , на себя. В работах Дж. Ламперти <sup>(2)</sup>, Г. Лумера <sup>(3)</sup>, К. Тама <sup>(4)</sup> теорема С. Банаха обобщалась на некоторый класс комплекснозначных функций и последовательностей.

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий описать группу изометрий вещественного симметричного пространства последовательностей. Ответ существенно зависит от размерности пространства, что отличает действительный случай от комплексного.

Банахово пространство последовательностей  $\mathcal{E}$  называется симметричным, если  $\|x\|_{\mathcal{E}}$  инвариантна относительно любых перестановок координат вектора  $x$  и изменения их знаков. Два банаховых пространства  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  будем называть равными ( $\mathcal{E}_1 \equiv \mathcal{E}_2$ ), если они совпадают как множества и их нормы пропорциональны. Если  $n = 2, 3, \dots, \infty$ , то через  $W^n$  будем обозначать множество операторов вида (1).

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{E}$  — симметричное пространство,  $\dim \mathcal{E} = n \neq 2, 4$  и  $\mathcal{E} \neq l_2^n$ .

Тогда множество изометрий пространства  $\mathcal{E}$  совпадает с  $W^n$ .

Описание конечных групп, порожденных отражениями <sup>(5)</sup>, довольно быстро приводит к требуемому результату в случае, когда  $\dim \mathcal{E} < \infty$ . Эти же утверждения используются при доказательстве того, что для любой изометрии  $U$  симметричного бесконечномерного пространства  $\mathcal{E}$  на себя

$$U\varepsilon_i = \pm \varepsilon_{k_i},$$

где  $k_i$  — перестановка чисел натурального ряда,  $\varepsilon_i$  — единичные орты. Для сепарабельных пространств  $\mathcal{E}$  отсюда непосредственно вытекает требуемое утверждение. Случай несепарабельных пространств требует привлечения дополнительных соображений.

**Предложение 1.** Пусть  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  — симметричные пространства,  $\dim \mathcal{E}_1 = \dim \mathcal{E}_2 = n \geq 3$ , или  $n = \infty$  и  $A$  — изометрия  $\mathcal{E}_1$  на  $\mathcal{E}_2$ . Если  $APA^{-1} \in W^n$  для любого  $P \in W^n$ , то  $\lambda A \in W^n$  для некоторого  $\lambda$ .

**Доказательство.** Мы приведем доказательство для бесконечномерных сепарабельных пространств. Обозначим через  $\Omega(x)$  орбиту элемента  $x$  относительно группы  $W^\infty$ . Так как отображение  $P \rightarrow APA^{-1}$  есть изоморфизм группы  $W^\infty$  на себя, то

$$A(\Omega(x)) = \Omega(Ax). \quad (2)$$

Если число ненулевых координат вектора  $x$  бесконечно, то множество  $\Omega(x)$  несчетно. Действительно, всякая последовательность  $\{\alpha_i = \pm 1\}$  определяет некоторый элемент  $y_\alpha$  из  $\Omega(x)$ :

$$(y_\alpha)_{q_i} = \alpha_i x_{q_i},$$

где  $x_{q_i} \neq 0$ , причем разным последовательностям соответствуют разные элементы.

Множество  $A(\Omega(\varepsilon_i))$  счетно. Поэтому число ненулевых координат вектора  $A\varepsilon_i$  конечно. Без ограничения общности

$$A\varepsilon_i = \sum_{j=1}^m \beta_j \varepsilon_j, \quad (3)$$

где  $\beta_j \neq 0$ . Пусть  $R^m = \{x: x_i = 0, i > m\}$ .

Множество  $\Omega(A\varepsilon_i) \cap R^{m+1}$  содержит не менее, чем  $2^m(m+1)$  элементов. Согласно (2) каждый элемент из  $\Omega(A\varepsilon_i) \cap R^{m+1}$  имеет вид  $A(\pm\varepsilon_s)$ , где  $s$  пробегает некоторое множество  $S$ . Из сказанного выше вытекает, что  $|S| \geq 2^{m-1}(m+1)$ . Так как  $A$  — изометрия, то множество векторов  $\{A\varepsilon_s, s \in S\}$  линейно независимо. С другой стороны,  $\{A\varepsilon_s, s \in S\} \subset R^{m+1}$ . Отсюда

$$(m+1) \geq 2^{m-1}(m+1).$$

Это неравенство возможно лишь при  $m=1$ .

Проводя аналогичные рассуждения для каждого орта  $\varepsilon_i$ , получаем

$$A\varepsilon_i = \mu_i \varepsilon_{k_i}.$$

В силу изометричности  $A$   $\mu_1 = \mu_2 = \dots = 1/\lambda$  и  $k_i$  — перестановка натурального ряда. Это означает, что на множестве финитных последовательностей оператор  $\lambda A$  совпадает с некоторым оператором из  $W^\infty$ .

В сепарабельном симметричном пространстве множество финитных последовательностей плотно. Отсюда получаем требуемое утверждение.

Предложение доказано.

Из теоремы 1 и предложения 1 вытекает

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  — симметричные пространства и  $\dim \mathcal{E}_1 = \dim \mathcal{E}_2 = n \neq 2, 4$  или  $n = \infty$ . Если  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  изометричны, то  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ .

Условие  $n \neq 2, 4$  является существенным в теоремах 1 и 2. Пусть  $A_k$  — оператор поворота на угол  $\pi/(2k)$ . Множество всех двумерных симметричных пространств распадается на бесконечное множество классов  $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots, \mathfrak{N}_\infty = \{l_2^2\}$ . Группа изометрий пространств класса  $\mathfrak{N}_k, k < \infty$ , порождается группой  $W^2$  и оператором  $A_k$ .

Если  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathfrak{N}_k, \mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_1$  изометрично  $\mathcal{E}_2$ , то изометрия с точностью до постоянного множителя осуществляется оператором  $A_{2k}$ . Обратное, если  $\mathcal{E} \in \mathfrak{N}_k$ , то пространство с нормой  $\|A_{2k}x\|_g$  принадлежит классу  $\mathfrak{N}_k$  и не совпадает с  $\mathcal{E}$ .

Пусть  $\mathcal{E}$  — четырехмерное симметричное пространство. Группа изометрий пространства  $\mathcal{E}$  совпадает с одной из следующих четырех групп:

- 1)  $W^4$ ;
- 2)  $W(F_4)$  — группа, порожденная  $W^4$  и оператором  $B$ , где  $b_{ij} = \delta_{ij} - 1/2$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ ;
- 3)  $\Gamma^4$  — группа, порожденная  $W^4$  и оператором

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

- 4)  $O(4)$ .

Четырехмерный случай выделяется тем, что группа  $\Gamma^4$  не порождается отражениями.

Теорема 2 без всяких изменений переносится на пространства первого и третьего классов. Если  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  принадлежат второму классу,  $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$  и эти пространства изометричны, то изометрия с точностью до постоянного множителя осуществляется оператором  $C$ . Обратное, если пространство  $\mathcal{E}$

принадлежит второму классу, то пространство с нормой  $\|Cx\|_g$  также принадлежит этому классу и не совпадает с ним.

Очевидно, изометрии, действующие из симметричного пространства  $\mathcal{E}$  в себя, имеют существенно другой вид по сравнению с изометриями, описанными в теореме 1. Для некоторых классов симметричных пространств удается получить описание множества изометрий, действующих в пространстве. Для пространств  $l_p$  это сделано С. Банахом <sup>(1)</sup>. Ниже приводим решение этой задачи в случае пространств Г. Г. Лоренца.

Пусть  $\varphi = \{\varphi_k\}$  — возрастающая вогнутая последовательность,  $\varphi_0 = 0$ . Через  $\Lambda(\varphi)$  <sup>(6)</sup> обозначается множество всех последовательностей, для которых

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* (\varphi_k - \varphi_{k-1}) < \infty,$$

где  $x_k^*$  — перестановка чисел  $|x_k|$  в убывающем порядке. По последовательности  $\varphi$  построим  $M$  — множество таких натуральных чисел  $n$ , что  $\varphi(k)/\varphi(nk)$  не зависит от  $k$ , и для  $n \in M$  положим

$$\gamma_n = \frac{\varphi(k)}{\varphi(nk)}$$

На множестве последовательностей рассмотрим оператор растяжения

$$\sigma_p: (x_1, x_2, \dots) \rightarrow (x_1, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_p, x_2, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_p, \dots).$$

Множество операторов вида

$$(Ux)_j = \begin{cases} x_i, & j = k_i, \\ 0, & j \neq k_i, \end{cases}$$

где  $k_i$  — возрастающая последовательность натуральных чисел, обозначим через  $V^\infty$ .

Предложение 2. Пусть последовательность  $\varphi = \{\varphi_k\}$  строго вогнута,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \infty$$

и  $T$  — изометрия пространства  $\Lambda(\varphi)$  в себя.

Тогда  $T = \gamma_p U Q \sigma_p$ , где  $U \in V^\infty$ ,  $Q \in W^\infty$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

Хабаровский государственный педагогический институт

Поступило  
14 I 1974

Воронежский государственный университет  
им. Ленинского комсомола

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. Банах, Курс функционального анализа, 1948. <sup>2</sup> J. Lamperti, Pacific J. Math., v. 8, № 3 (1958). <sup>3</sup> G. Lumer, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, v. 13, № 1 (1963). <sup>4</sup> K. W. Tam, Pacific J. Math., v. 31, № 1 (1969). <sup>5</sup> Н. Бурбаки, Группы и алгебры, М., 1972. <sup>6</sup> G. G. Lorentz, Pacific J. Math., v. 1, 411 (1951).