Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 2

УДК 513.88 **МАТЕМАТИКА**

Р. К. ВАСИЛЬЕВ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ СХОДИМОСТИ ИЗОТОННЫХ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ АДДИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 11 I 1974)

В работе изучаются некоторые условия сходимости изотонных и положительных аддитивных операторов к тождественному оператору в пространствах конечных и измеримых функций. Исследования принадлежат к кругу вопросов, изучение которых было начато известной работой ([1]) и которым посвящены работы ([2–11]), а также статьи, упомянутые в обзорах ([12], [13]). Полученные результаты примыкают к исследованиям автора в ([11]). Используемые ниже сведения из теории пространств Л. В. Канторовича см. в ([14]).

Пусть X есть линейная структура, G и X', где $G\subset X'$,— ее подмножества, а $\mathfrak{C}(c)$ — некоторый класс сходимости в X, образованный парами $(\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}, x)$, где $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — некоторая направленность (сеть) в X, а $x\in X$; $x_\alpha\xrightarrow{(c)}x$ означает, что $(\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}, x)\in\mathfrak{C}(c)$. Через $\hat G_i=\hat G_i(X', X, c)$ обозначается множество всех таких $x\in X'$, что для любой направленности $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ изотонных операторов из X' в X (т. е. таких, что $U_\alpha x\geqslant U_\alpha y$ при $x\geqslant y$) из условий $U_\alpha v\xrightarrow{(c)}v$ для всех $v\in G$ следует, что $U_\alpha x\xrightarrow{(c)}x$. Аналогичное множество для класса положительных аддитивных операторов обозначается через $\hat G_p=\hat G_p(X', X, c)$. Ограничиваясь рассмотрением только обычных последовательностей операторов, аналогичным образом можно определить множества $\hat G_{is}=\hat G_{is}(X', X, c)\subset X'$ и $\hat G_{ps}=\hat G_{ps}(X', X, c)\subset X'$. Ясно, что $\hat G_i\subset\hat G_p\subset\hat G_{ps}$ и $\hat G_i\subset\hat G_{is}\subset\hat G_{ps}$.

В настоящей заметке в пространствах конечных и измеримых функций дается описание множеств $\hat C_a$, $a=i$, p, is, ps, где $C=C(Q)$ есть некоторое пространство непрерывных функций. Большинство рассматриваемых результатов нельзя получить методами работ ([4], [11]), так как здесь не выполняются ограничения, связанные с теоремами Хана — Банаха — Канторовича о распространении положительных операторов.

1. Пусть $F=F(Q)$, $B=B(Q)$ и $C=C(Q)$ — линейные структуры соответственно всех конечных, всех ограниченных и всех непрерывных функций на некотором топологическом пространстве Q. Символы $\rightrightarrows$ и $\to$ обозначают соответственно равномерную и поточечную сходимость всюду на Q.

Теорема 1. *Пусть $C\subset X'\subset F$, $\mathfrak{C}(c)$ — класс сходимости в F, в котором всякая стационарная последовательность $\{f_n=f\}$, $n=1, 2, \ldots$, имеет единственный предел f, и $\hat C_a=\hat C_a(X', F, c)$ при $a=i$ и is.*

Тогда $\hat C_i=\hat C_{is}=C$.

Теорема 2. *Пусть $C\subset X'\subset F$, а $\hat C_a$ при $a=p$ и ps есть либо $\hat C_a(X', F, \to)$, либо $\hat C_a(X', F, \rightrightarrows)$.*

Тогда $\hat C_p=C$.

Если же, кроме того, Q удовлетворяет первой аксиоме счетности, то $\hat C_p=\hat C_{ps}=C$.

Теорема 3. *Пусть* $B\subset X'\subset F$, *а* $\hat{B}_a$ *при* $a=p$ *и* ps *есть либо* $\hat{B}_a(X', F, \to)$, *либо* $B_a(X', F, \rightrightarrows)$.

Тогда $\hat{B}_p=\hat{B}_{ps}=B$.

Пусть теперь $C^*=C^*(Q)$ и $C_T^*=C_T^*(Q)$ есть соответственно пространства всех ограниченных непрерывных функций и всех ограниченных функций, непрерывных в точках множества $T\subset Q$. Если на Q задана мера μ, то через $C_0^*=C_0^*(Q)$ обозначается пространство всех ограниченных функций, непрерывных почти во всех точках Q. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть* Q *есть вполне регулярное топологическое пространство*, $T\subset Q$, $C_T^*\subset X'\subset F$, *а* $\hat{C}_a^*=\hat{C}_a^*(X', F, \overset{T}{\to})$ *при* $a=i$, p, is *и* ps, *где символ* $(\underset{T}{\to})$ *означает поточечную сходимость элементов из* F *на множестве* T.

Тогда $\hat{C}_i^*=\hat{C}_p^*=C_T^*$.

Если же, кроме того, Q *удовлетворяет первой аксиоме счетности, то* $\hat{C}_i^*=\hat{C}_p^*=\hat{C}_{is}^*=\hat{C}_{ps}^*=\hat{C}_T^*$.

Теорема 5. *Пусть* μ — *регулярная мера на бикомпакте* Q, *причем* $\mu(Q)\neq 0$, $C_0^*\subset X'\subset F$, *а* $\hat{C}_a=\hat{C}_a(X', F, \overset{0}{\to})$ *при* $a=i$, p, is *и* ps, *где символ* $(\underset{0}{\to})$ *означает сходимость почти всюду на* Q.

Тогда $\hat{C}_i=\hat{C}_p=C_0^*$.

Если же, кроме того, Q *удовлетворяет первой аксиоме счетности, то* $\hat{C}_i=\hat{C}_p=\hat{C}_{is}=\hat{C}_{ps}=\hat{C}_0^*$.

2. Пусть $S_\mu(Q)$ есть K-пространство измеримых почти всюду конечных вещественных функций, заданных на бикомпакте Q с регулярной вполне конечной мерой μ. Через $\mathbf{C}=\mathbf{C}(Q)$ и $\mathbf{C}_0^*=\mathbf{C}_0^*(Q)$ обозначаются подпространства $S_\mu(Q)$, состоящие из классов эквивалентных функций, порожденных соответственно пространствами $C=C(Q)$ и $C_0^*=C_0^*(Q)$.

Теорема 6. *Пусть* μ *есть такая регулярная вполне конечная мера на бикомпакте* Q, *что каждое непустое открытое множество бикомпакта* Q *имеет положительную меру, и пусть символы* (o) *и* $(*)$ *означают соответственно* (o)- *и* $(*)$-*сходимость в некотором* K-*пространстве* $R_\mu(Q)$, *нормально содержащемся в* $S_\mu(Q)$ *и содержащем константы.*

Тогда, если $\mathbf{C}_0^*\subset X'\subset X\subset S_\mu(Q)$, *где* X *есть нормальное подпространство пространства* $S_\mu(Q)$, *а* $\hat{\mathbf{C}}_{is}$ *есть либо множество* $\hat{\mathbf{C}}_{is}(X', X, o)$, *либо множество* $\hat{\mathbf{C}}_{is}(X', X, *)$, *то*

$$\hat{\mathbf{C}}_{is}=\mathbf{C}_0^*.$$

Отметим, что это утверждение, в частности, имеет место для сходимостей почти всюду, по мере и метрике любого пространства $L_{p,\mu}(Q)$ функций, суммируемых в p-й степени $(p>0)$.

Две измеримые функции $f(t)\geqslant 0$ и $g(t)\geqslant 0$, заданные на пространстве Q с мерой μ, называются пропорционально равноизмеримыми, если существует такое число $k>0$, что $\mu(\{t\colon f(t)>a\})=k\cdot\mu(\{t\colon g(t)>a\})$ при любом действительном $a>0$.

Теорема 7. *Пусть в условиях теоремы* 6 Q *есть метрический компакт, мера* μ *не содержит атомов, а* X *вместе с классом* $\mathfrak{f}$ *функции* $f(t)\geqslant 0$ *содержит классы всех функций пропорционально равноизмеримых с* $f(t)$.

Тогда, если при $a=is$ *или* ps $\mathbf{C}_a$ *есть либо множество* $\hat{\mathbf{C}}_a(X', X, o)$, *либо множество* $\hat{\mathbf{C}}_a(X', X, *)$, *то*

$$\hat{\mathbf{C}}_{is}=\hat{\mathbf{C}}_{ps}=\mathbf{C}_0^*.$$

Теорема 8. *Пусть в условиях теоремы 6 Q есть метрический компакт, X — линейное подмножество в $S_\mu(Q)$, содержащее классы характеристических функций всех измеримых подмножеств Q, а X' удовлетворяет условию: существует такой элемент $\gamma\in S_\mu(Q)$, $\gamma(t)>0$ при $t\in Q$, что*

$$X'[\gamma]=\{f\cdot\gamma:\ f\in X'\}\subset L_{1,\mu}(Q).$$

Тогда, если символы $\hat{\mathrm{C}}_{is}$, $\hat{\mathrm{C}}_{ps}$ и $\mathrm{C}_0{}^*$ имеют тот же смысл, что и в теореме 7, то

$$\hat{\mathrm{C}}_{is}=\hat{\mathrm{C}}_{ps}=\mathrm{C}_0{}^*.$$

3. При сравнении условий теорем 7 и 8 с условиями теоремы 6 возникает вопрос о том, не являются ли условие неатомичности меры в теореме 7 и соответственно условие интегрируемости функций из множества $X'[\gamma]$ в теореме 8 избыточными. В теореме 9 этого пункта дается критерий равенства $\hat{\mathrm{C}}_{ps}=\mathrm{C}_0{}^*$, из которого следует отрицательный ответ на этот вопрос.

Пусть $R_\mu(Q)$ есть нормальное подпространство пространства $S_\mu(Q)$ (Q — множество с вполне конечной мерой μ), а $R_\mu(S)$ — K-пространство, порожденное множеством $\{f_S:\ f\in R_\mu(Q)\}$, где $f_S(t)$ — сужение функции $f(t)$ на μ-измеримое множество $S\subset Q$.

Определение. μ-Измеримое множество положительной меры $Q^*\subset Q$ называется **множеством ненормируемости пространства** $R_\mu(Q)$, если, каково бы ни было μ-измеримое множество $S\subset Q^*$, $\mu(S)>0$, в K-пространстве $R_\mu(S)$ нельзя ввести монотонную норму (т. е. $R_\mu(S)$ не может быть сделано KN-пространством).

Легко видеть, что всякое множество ненормируемости не содержит атомов. Кроме того, всегда можно найти **максимальное** множество ненормируемости Q^*, понимаемое в том смысле, что если $Q_1{}^*$ есть множество ненормируемости $R_\mu(Q)$, то $\mu(Q_1{}^*\setminus Q^*)=0$. Различные критерии множества ненормируемости даются в следующем утверждении.

Лемма. *Пусть $R_\mu(Q)$ — нормальное подпространство пространства $S_\mu(Q)$ с единицей u и с устойчивой (o)-сходимостью, $Q'=\{t:\ u(t)=0;\ t\in Q\}$ и $Q^*\subset Q$, $\mu(Q^*)>0$.*

Тогда утверждение о том, что Q^* есть множество ненормируемости пространства $R_\mu(Q)$ равносильно каждому из следующих утверждений:

а) *Каково бы ни было μ-измеримое множество $S\subset Q^*$, $\mu(S)>0$, в $R_\mu(S)$ нельзя ввести аддитивную монотонную норму.*

б) *Каково бы ни было μ-измеримое множество $S\subset Q^*$, $\mu(S)>0$, не существует такого $z\in S_\mu(S)$, $z(t)>0$ почти всюду на S, что $R_{\mu,z}(S)=\{f\cdot z:\ f\in R_\mu(S)\}\subset L_{1,\mu}(S)$.*

в) $\mu(Q^*\cap Q')=0$ *и не существует ненулевых положительных аддитивных функционалов на пространстве $R_\mu(Q^*)$.*

Теорема 9. *Пусть μ есть такая регулярная и вполне конечная мера на метрическом компакте Q, что каждое непустое открытое множество компакта Q имеет положительную меру, и пусть символы (o) и $(*)$ означают соответственно (o)- и $(*)$-сходимость в некотором K-пространстве $R_\mu(Q)$, нормально содержащемся в $S_\mu(Q)$ и содержащем константы. Пусть, далее, $\mathrm{C}_0{}^*\subset X'\subset X\subset S_\mu(Q)$, где X' и X суть нормальные подпространства пространства $S_\mu(Q)$, причем X' есть пространство с единицей и с устойчивой (o)-сходимостью, а X содержит вместе с классом f функции $f(t)\geqslant 0$ классы всех функций, пропорционально равноизмеримых с $f(t)$. Наконец, пусть $\lambda=\{\tau_n\}_n$ есть множество всех одноточечных атомов в Q, а $\hat{\mathrm{C}}_{ps}$ есть либо множество $\hat{\mathrm{C}}_{ps}(X', X, o)$, либо множество $\mathrm{C}_{ps}(X', X, *)$.*

Тогда, для того чтобы имело место равенство

$$\hat{\mathrm{C}}_{ps}=\mathrm{C}_0{}^*,$$

необходимо и достаточно, чтобы любое максимальное (а, значит, и вообще любое) множество ненормируемости Q^* пространства $X'=X_\mu'(Q)$ удовлетворяло условию

$$\lambda\cap\overline{Q_0{}^*}=\Lambda,$$

где символом $\overline{Q_0{}^*}$ обозначено замыкание внутренности $Q_0{}^*$ множества Q^*, а Λ есть пустое множество.

Следствие. *Если в условиях теоремы 9 λ конечно, компакт Q связен и $X'=X=S_\mu(Q)$, то в случаях сходимости по мере и почти всюду $\mathbf{C}_0{}^*=\hat{\mathbf{C}}_{is}\neq\hat{\mathbf{C}}_{ps}$.*

Московский автомобильно-дорожный институт

Поступило 11 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. П. Коровкин,* ДАН, т. 90, № 6, 961 (1953). [2] *Ю. А. Шашкин,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 26, № 4, 495 (1962). [3] *М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц,* Studia Math. v. 31, № 5, 455 (1968). [4] *С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов,* Оптимизация, № 3, 120 (1971). [5] *С. С. Кутателадзе,* Матем. заметки, т. 13, № 1, 55 (1973). [6] *С. С. Кутателадзе,* ДАН, т. 208, № 4, 771 (1973). [7] *M. Wolff,* Math. Ann., v. 200, № 1, 47 (1973). [8] *П. П. Коровкин,* В сборн. Конструктивная теория функций. Тр. международн. конфер., Варна, 1970, София, 1972, стр. 55. [9] *Р. К. Васильев,* Изв. высш. учебн. завед., № 6, 35 (1970). [10] *Р. К. Васильев,* Матем. заметки, т. 8, № 4, 475 (1970). [11] *Р. К. Васильев,* Матем. заметки, т. 12, № 3, 337 (1972). [12] *А. Л. Гаркави,* В сборн. Математический анализ, 1967, Итоги науки, М., 1969, стр. 75. [13] *С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов,* УМН, т. 27, № 3, 127 (1972). [14] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер,* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.–Л., 1950.