УДК 512.548

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_43
EDN: PKPFNE

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ФАКТОРГРУППЫ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУПП СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. III

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC QUOTIENT GROUPS OF POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. III

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение l-арных факторгрупп полиадических групп специального вида.

Ключевые слова: *полиадическая операция, полуинвариантная l-арная подгруппа, n-полуинвариантная l-арная подгруппа, факторгруппа, конгруэнция, смежный класс.*

Для цитирования: *Гальмак, А.М.* Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. III / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 43–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_43. – EDN: PKPFNE

Abstract. The study on the l-ary quotient groups of polyadic groups of special form is carried on.

Keywords: *polyadic operation, semiinvariant l-ary subgroup, n-semiinvariant l-ary subgroup, quotient group, congruence, coset.*

For citation: *Gal'mak, A.M.* Polyadic quotient groups of polyadic groups of special form. III / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 43–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_43 (in Russian). – EDN: PKPFNE

Введение

В статье продолжается изучение l-арных факторгрупп l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ специального вида по её полуинвариантным l-арным подгруппам, начатое в статьях [1], [2]. Данная статья составляет с ними единое целое, что отражено в названиях статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1], [2]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], [2], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работ [1], [2] даются без указания на эти работы. Например, ссылка на теорему 2.1 означает, что имеется в виду теорема 2.1 из раздела 2 в [1], а ссылка на лемму 3.2 означает, что имеется в виду лемма 3.2 из раздела 3 в [2]. Целью данной статьи является получение новых результатов, являющихся аналогами и обобщениями основных результатов из [1], [2].

5 Вспомогательные результаты

Приведём новое доказательство леммы 3.3, дополнив её формулировку.

***Лемма* 5.1**. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа,* $< B, \eta >$ *– её n-арная подгруппа,* $d_1, \ldots, d_{l-1} \in A$. *Тогда*:

1) *если существуют элементы*

$$b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$$

такие, что последовательности $d_1 \ldots d_{l-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста, то*

$$\eta(d_1 \ldots d_{l-1}B) = B, \quad (5.1)$$

$$\eta(Bd_1 \ldots d_{l-1}) = B, \quad (5.2)$$

$$\eta(d_1 \ldots d_{l-1}B) = \eta(Bd_1 \ldots d_{l-1}); \quad (5.3)$$

2) *если верно одно из равенств* (5.1) *или* (5.2), *то существуют элементы* $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $d_1 \ldots d_{l-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста, а также верны второе из указанных равенств и равенство* (5.3).

Доказательство. 1) Так как последовательности $d_1 \ldots d_{l-1}$ и $b_1 \ldots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста, то

$$\eta(d_1 \ldots d_{l-1}b) = \eta(b_1 \ldots b_{n-1}b),$$

$$\eta(bd_1 \ldots d_{l-1}) = \eta(bb_1 \ldots b_{n-1})$$

для любого $b \in B$. Поэтому

$$B = \{\eta(b_1 \ldots b_{n-1}b) \mid b \in B\} = \{\eta(d_1 \ldots d_{l-1}b) \mid b \in B\} = \eta(d_1 \ldots d_{l-1}B),$$

$$B = \{\eta(bb_1 \ldots b_{n-1}) \mid b \in B\} = \{\eta(bd_1 \ldots d_{l-1}) \mid b \in B\} = \eta(Bd_1 \ldots d_{l-1}),$$

то есть верны равенства (5.1) и (5.2), а значит и равенство (5.3).

2) Если верно, например, равенство (5.1), то для любого $c \in B$ найдётся $b \in B$ такой, что

$$\eta(d_1 \ldots d_{l-1}c) = b \in B. \tag{5.4}$$

А так как $< B, \eta >$ – n-арная группа, то для $c, b \in B$ в ней разрешимо уравнение

$$\eta(x_1 \ldots x_{n-1}c) = b.$$

Следовательно, найдутся такие $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$, что

$$\eta(b_1 \ldots b_{n-1}c) = b. \tag{5.5}$$

Из равенства правых частей в (5.4) и (5.5) следует равенство

$$\eta(d_1 \ldots d_{l-1}c) = \eta(b_1 \ldots b_{n-1}c),$$

что означает эквивалентность в смысле Поста последовательностей $d_1 \ldots d_{l-1}$ и $b_1 \ldots b_{n-1}$. Поэтому согласно 1), верны равенства (5.2) и (5.3).

Для равенства (5.2) доказательство утверждения 2) проводится аналогично. □

Полагая в лемме 5.1 $d_1 = \ldots = d_{l-1} = d$, получим следствие, дополняющее следствие 3.1.

***Следствие* 5.1**. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа*, $< B, \eta >$ – *её n-арная подгруппа*, $d \in A$. *Тогда*:

1) *если существуют элементы* $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ *такие*, *что последовательности* $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста*, *то*

$$\eta(\underbrace{d \ldots d}_{l-1} B) = B, \tag{5.6}$$

$$\eta(B \underbrace{d \ldots d}_{l-1}) = B, \tag{5.7}$$

$$\eta(\underbrace{d \ldots d}_{l-1} B) = \eta(B \underbrace{d \ldots d}_{l-1}); \tag{5.8}$$

2) *если верно одно из равенств* (5.6) *или* (5.7), *то существуют элементы* $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ *такие*, *что последовательности* $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста*, *а также верны второе из указанных равенств и равенство* (5.8).

Нам понадобятся ещё две леммы.

***Лемма* 5.2** [3; 4, Предложение 3.5]. *Если элемент a n-арной группы* $< A, \eta >$ *имеет конечный n-адический порядок m, то* $a^{[r]} = a$ *тогда только тогда*, *когда r кратно m*.

***Лемма* 5.3**. *Если* $l = s(n-1) + 1$, *где* $s \geq 1$, $< B, \eta >$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, *то порядок смежного класса* $\eta(a \underbrace{B \ldots B}_{n-1})$ *n-арной факторгруппы* $< A / B, \eta >$ *делит s тогда и только тогда*, *когда последовательность* $\underbrace{a \ldots a}_{l-1}$ *эквивалентна в смысле Поста последовательности* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *для некоторых* $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$.

Доказательство. Необходимость. Так как порядок смежного класса $\eta(a \underbrace{B \ldots B}_{n-1})$ делит s, то по лемме 5.2

$$(\eta(a \underbrace{B \ldots B}_{n-1}))^{[s]} = \eta(a \underbrace{B \ldots B}_{n-1}), \tag{5.9}$$

откуда ввиду леммы 3.2 следует

$$\eta(a^{[s]} \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = \eta(a \underbrace{B \ldots B}_{n-1}). \tag{5.10}$$

Перепишем полученное равенство, применив определение полиадической степени

$$\eta(\eta(\underbrace{a \ \ldots \ a}_{s(n-1)+1}) \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = \eta(a \underbrace{B \ldots B}_{n-1}), \tag{5.11}$$

то есть

$$\eta(\eta(\underbrace{a \ldots a}_{l}) \underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = \eta(a \underbrace{B \ldots B}_{n-1}), \tag{5.12}$$

откуда, учитывая нейтральность последовательности $\bar{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-2}$, а также равенство $[\underbrace{B \ldots B}_{n}] = B$, получаем

$$\eta(\bar{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-3} \ \eta(\eta(\underbrace{a \ldots a}_{l}) \underbrace{B \ldots B}_{n-1})B) =$$

$$= \eta(\bar{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-3} \ \eta(a \underbrace{B \ldots B}_{n-1})B), \tag{5.13}$$

$$\eta(\bar{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-2} \underbrace{a \ldots a}_{l-1} \ [\underbrace{B \ldots B}_{n}]) =$$

$$= \eta(\bar{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-2} \ [\underbrace{B \ldots B}_{n}]), \tag{5.14}$$

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{l-1} B) = B. \tag{5.15}$$

Поэтому согласно утверждению 2) следствия 5.1, последовательность $\underbrace{a \ldots a}_{l-1}$ эквивалентна в смысле Поста последовательности $b_1 \ldots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$.

Достаточность. Если последовательность $\underbrace{a \ldots a}_{l-1}$ эквивалентна в смысле Поста последовательности $b_1 \ldots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$, то согласно утверждению 1) следствия 5.1, верны равенства

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{l-1} B) = B, \tag{5.16}$$

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{l-1} B) = \eta(B \underbrace{a \ldots a}_{l-1}). \tag{5.17}$$

Из (5.16) следует

$$\eta(a \underbrace{B \ldots B}_{n-2} \underbrace{a \ldots a}_{l-1} B) = \eta(a \underbrace{B \ldots B}_{n-2} B).$$

Применив к левой части полученного равенства $n-2$ раза равенство (5.17), последовательно получим

$$\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-3}\underbrace{a\ldots a}_{l-1}BB) = \eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(aB\underbrace{a\ldots a}_{l-1}\underbrace{B\ldots B}_{n-2}) = \eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}),$$

$$\eta(a\underbrace{a\ldots a}_{l-1}B\underbrace{B\ldots B}_{n-2}) = \eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}),$$

то есть верно (5.12). Далее последовательно получаем (5.11), (5.10) и (5.9). Из (5.9) ввиду леммы 5.2, следует, что порядок смежного класса $\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})$ делит s. □

Полагая в лемме 5.3 $s = 1$, получим

***Следствие* 5.2**. *Если* $<B, \eta>$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $<A, \eta>$, *то порядок смежного класса* $\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})$ *n-арной факторгруппы* $<A/B, \eta>$ *равен* 1 *тогда и только тогда, когда последовательность* $\underbrace{a\ldots a}_{n-1}$ *эквивалентна в смысле Поста последовательности* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *для некоторых* $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$.

***Замечание* 5.1**. Легко поверяется, что если $<B, \eta>$ – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $<A, \eta>$, то порядок смежного класса $\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})$ n-арной факторгруппы $<A/B, \eta>$ равен 1 тогда и только тогда, когда

$$\eta(\underbrace{a\ldots a}_{n}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Поэтому следующее следствие равносильное следствию 5.2.

***Следствие* 5.3**. *Если* $<B, \eta>$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $<A, \eta>$, $a \in A$, *то*

$$\eta(\underbrace{a\ldots a}_{n}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})$$

тогда и только тогда, когда последовательность $\underbrace{a\ldots a}_{n-1}$ *эквивалентна в смысле Поста последовательности* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *для некоторых* $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$.

6 Основные результаты

Применим лемму 5.3 для получения новых результатов, соответствующих результатам из [1], [2].

Лемма 5.3 и теорема 2.1 позволяет сформулировать следующий результат, эквивалентный этой теореме.

***Теорема* 6.1**. *Пусть* $<B, \eta>$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $<A, \eta>$, *в A существует такой элемент d, что порядок смежного класса* $H = \eta(d\underbrace{B\ldots B}_{n-1})$ *n-арной факторгруппы* $<A/B, \eta>$ *делит s; подстановка σ из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *декартова степень* H^k *замкнута относительно l-арной операции* $\eta_{s,\sigma,k}$, *а универсальная алгебра* $<H^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$;

2) *для полуинвариантных в* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *l-арных подгрупп* $<H^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *и* $<B^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *соответствующие l-арные факторгруппы совпадают*:

$$<A^k/H^k, \eta_{s,\sigma,k}> = <A^k/B^k, \eta_{s,\sigma,k}>;$$

3) *конгруэнции* ρ_{H^k} *и* ρ_{B^k} *l-арной группы* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$, *определяемые полуинвариантными l-арными подгруппами* $<H^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *и* $<B^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *совпадают*: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) *если* $B \neq A$, *для некоторого* $i = 2, \ldots, s$ *подстановка* $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ *не является тождественной, то l-арная подгруппта* $<H^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *не является n-полуинвариантной в* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$.

Замечание 5.1, следствие 5.2 и теорема 2.2 позволяют сформулировать следующий результат, эквивалентный этой теореме.

***Теорема* 6.2**. *Пусть* $<B, \eta>$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $<A, \eta>$, *существует элемент* $a \in A$ *такой, что*

$$\eta(\underbrace{a\ldots a}_{n}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1});$$

подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда справедливы утверждения* 1)–4) *теоремы* 6.1, *а также утверждение*: *если подстановка* σ^{n-1} *является тождественной, то* $<H^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *– n-полуинвариантная l-арная подгруппа l-арной группы* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$.

***Замечание* 6.1**. Утверждения 2) и 3) теоремы 2.1 справедливы и для теорем 4.1 и 4.2.

В [5] была доказана приведённая ниже теорема.

***Теорема* 6.3** [5, теорема 4.2.1]. *Пусть B – нормальная подгруппа группы A, отличная от неё*; *факторгруппа A/B является циклической и имеет порядок, делящий* $l-1$; *подстановка σ из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого смежного класса H факторгруппы* A/B *декартова степень* H^k *замкнута относительно l-арной операции* $[\ ]_{l,\sigma,k}$, *а универсальная алгебра* $<H^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$. *Если же σ – нетождественная подстановка, то l-арная подгруппа* $<H^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$ *не является инвариантной в* $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$.

Лемма 5.3, теорема 4.1 и замечание 6.1 позволяют сформулировать следующий результат, обобщающий теорему 6.3.

***Теорема* 6.4**. *Пусть* $<B, \eta>$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы*

$< A, \eta >$, *отличная от неё*; *n-арная факторгруппа* $< A / B, \eta >$ *является циклической*, *порождаемой смежным классом* $\eta(a\underbrace{B \ldots B}_{n-1})$, *порядок которого делит s*; *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *для любого смежного класса H n-арной факторгруппы* $< A/B, \eta >$ *декартова степень* H^k *замкнута относительно l-арной операции* $\eta_{s,\sigma,k}$, *а универсальная алгебра* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$;

2) *для полуинвариантных в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *l-арных подгрупп* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *и* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *соответствующие l-арные факторгруппы совпадают*:

$$< A^k / H^k, \eta_{s,\sigma,k} > = < A^k / B^k, \eta_{s,\sigma,k} >;$$

3) *конгруэнции* ρ_{H^k} *и* ρ_{B^k} *l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, *определяемые полуинвариантными l-арными подгруппами* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *и* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *совпадают*: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) *если для некоторого* $i = 2, \ldots, s$ *подстановка* $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ *не является тождественной*, *то l-арная подгруппта* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуинвариантной в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Замечание 5.1, следствие 5.2 и теорема 6.4 позволяют сформулировать следующий результат.

***Теорема* 6.5**. *Пусть* $< B, \eta >$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, *отличная от неё*; *n-арная факторгруппа* $< A / B, \eta >$ *является циклической*, *порождаемой смежным классом* $\eta(a\underbrace{B \ldots B}_{n-1})$, *выполняется условие*

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{n}\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = \eta(a\underbrace{B \ldots B}_{n-1}),$$

подстановка σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда справедливы утверждения* 1)–4) *теоремы* 6.4, *а также утверждение*: *если подстановка* σ^{n-1} *является тождественной*, *то* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – *n-полуинвариантная l-арная подгруппа l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Применение леммы 5.3 позволяет получить следующую теорему, которая доказывается аналогично теореме 3.1, при этом вместо теоремы 2.1 применяется теорема 6.4.

***Теорема* 6.6**. *Пусть* $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа полуабелевой n-арной группы* $< A, \eta >$, *отличная от неё*; *n-арная факторгруппа* $< A/B, \eta >$ *является циклической*, *порождаемой смежным классом* $\eta(a\underbrace{B \ldots B}_{n-1})$, *порядок которого делит s*; *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. *Тогда справедливы все утверждения теоремы* 6.1. *Кроме того*, *универсальная алгебра* $< H^k, \eta_{n,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной*, *но не n-полуинвариантной l-арной подгруппой в полуабелевой l-арной группе* $< A^k, \eta_{n,\sigma,k} >$, *которая не является n-полуабелевой.*

***Замечание* 6.2**. В теореме 6.6, как и в теореме 3.1, в качестве подстановки σ можно выбрать нетождественную подстановку с условием $\sigma^{n+1} = \sigma$, и положить $l = n(n-1) + 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 84–89.

2. *Гальмак*, *А.М.* Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 62–66.

3. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

4. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мінск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

5. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Поступила в редакцию 12.02.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор