МАТЕМАТИКА

УДК 517.983.2
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_84
EDN: DUMJWV

О ДВУХ ТИПАХ СКОШЕННЫХ μ-ГАНКЕЛЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Р. Миротин, Е.Ю. Кузьменкова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON TWO TYPES OF SLANT μ-HANKEL OPERATORS IN HILBERT SPACES

A.R. Mirotin, E.Yu. Kuzmenkova

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе вводятся два типа операторов, действующих в гильбертовом пространстве, которые обобщают как класс μ-ганкелевых операторов, так и классы скошенных ганкелевых операторов, определенные ранее. Получены описания операторов введенных классов в терминах коммутационных соотношений, даны критерии их ограниченности, ядерности и принадлежности классу Гильберта – Шмидта. Полученные результаты применяются к интегральным операторам в пространстве Харди.

Ключевые слова: *оператор Ганкеля*, *гильбертово пространство*, *ограниченный оператор*, *ядерный оператор*, *пространство Харди*, *интегральный оператор*, *μ-ганкелев оператор*.

Для цитирования: *Миротин*, *А.Р.* О двух типах скошенных μ-ганкелевых операторов в гильбертовых пространствах / А.Р. Миротин, Е.Ю. Кузьменкова // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 84–90. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_84. – EDN: DUMJWV

Abstract. This paper introduces two types of operators acting in Hilbert spaces that generalize both the class of μ-Hankel operators and the classes of slant Hankel operators defined previously. The operators in these classes are described in terms of commutation relations, and the criteria for their boundedness, nuclearity, and membership in the Hilbert – Schmidt class are given. These results are applied to integral operators in Hardy spaces.

Keywords: *Hankel operator*, *Hilbert space*, *bounded operator*, *nuclear operator*, *Hardy space*, *integral operator*, *μ-Hankel operator*.

For citation: *Mirotin*, *A.R.* On two types of slant μ-Hankel operators in Hilbert spaces / A. R. Mirotin, E. Yu. Kuzmenkova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 84–90. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_84 (in Russian). – EDN: DUMJWV

Введение

Матричное задание является одним из способов введения линейных операторов, действующих между гильбертовыми пространствами (см, например, [1]). Хотя универсальный удобный критерий ограниченности при таком задании не известен, имеется ряд достаточных и необходимых условий (см, например, [4], [5]). В то же время для таких важных классов операторов, как операторы Тёплица и Ганкеля, известны критерии их ограниченности в гильбертовых пространствах в терминах их матриц (см., например, [6], [7], [9]). В последнее время появился ряд работ (см., например, [10]–[14]), в которых рассмотрены некоторые обобщения ганкелевых операторов, также допускающие матричное задание. В настоящей работе вводятся два типа операторов, действующих в гильбертовом пространстве, которые обобщают класс операторов, введенный в [11]. Получены описания операторов этих классов в терминах коммутационных соотношений, содержащих оператор сдвига, и критерии ограниченности, ядерности и принадлежности классу Гильберта – Шмидта в терминах матриц этих операторов. Даны приложения этих результатов к интегральным операторам в пространстве Харди H^2 в единичном круге. Часть результатов данной работы была анонсирована в [15].

1 Типы скошенных μ-ганкелевых операторов

Напомним, что матрица линейного оператора T в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ в ортонормированном базисе $(e_k)_{k\geq 0}$ этого пространства состоит из элементов вида

$$t_{jk} = \langle Te_k, e_j\rangle.$$

Пусть μ – комплексное число, $\gamma = \{\gamma_j\}_{j\geq 0}$, $\delta = \{\delta_j\}_{j\geq 0}$ – последовательности комплексных чисел, $p \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство. Введем операторы следующих двух типов.

Определение **1.1.** Оператор C в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ назовем *скошенным μ-ганкелевым типа* [C], если для некоторого ортонормированного базиса $(e_k)_{k\geq 0}\subset\mathcal{H}$ матрица этого оператора состоит из элементов вида

$$c_{jk}=\mu^j\gamma_{pk+j}. \qquad (1.1)$$

Матрица скошенного μ-ганкелева оператора типа [C] имеет вид $(c_{jk})_{k,j\geq 0}=(\mu^j\gamma_{pk+j})_{k,j\geq 0}$, т. е.

$$[C]:=\begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_p & \gamma_{2p} & \gamma_{3p} & \gamma_{4p} & \cdots \\ \mu\gamma_1 & \mu\gamma_{p+1} & \mu\gamma_{2p+1} & \mu\gamma_{3p+1} & \cdots & \\ \mu^2\gamma_2 & \mu^2\gamma_{p+2} & \mu^2\gamma_{2p+2} & \cdots & & \\ \mu^3\gamma_3 & \mu^3\gamma_{p+3} & \cdots & & & \\ \mu^4\gamma_4 & \cdots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Далее операторы, удовлетворяющие определению 1.1, будем обозначать также $C_{\mu,\gamma,p}$.

***Определение* 1.2.** Оператор D в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ назовем *скошенным μ-ганкелевым типа* [D], если для некоторого ортонормированного базиса $(e_k)_{k\geq 0}\subset\mathcal{H}$ матрица этого оператора состоит из элементов вида

$$d_{jk}=\mu^j\delta_{k+pj}. \qquad (1.3)$$

Матрица скошенного μ-ганкелева оператора типа [D] имеет вид $(d_{jk})_{k,j\geq 0}=(\mu^j\delta_{k+pj})_{k,j\geq 0}$, т. е.

$$[D]:=\begin{pmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \cdots \\ \mu\delta_p & \mu\delta_{1+p} & \mu\delta_{2+p} & \mu\delta_{3+p} & \cdots & \\ \mu^2\delta_{2p} & \mu^2\delta_{1+2p} & \mu^2\delta_{2+2p} & \cdots & & \\ \mu^3\delta_{3p} & \mu^3\delta_{1+3p} & \cdots & & & \\ \mu^4\delta_{4p} & \cdots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

Далее операторы, удовлетворяющие определению 1.2, будем обозначать также $D_{\mu,\delta,p}$.

Связь между операторами указанных типов устанавливает следующая

***Лемма* 1.1.** *Оператор T, действующий в $\mathcal{H}$, есть скошенный μ-ганкелев оператор $C_{\mu,\gamma,p}$ типа* [C] *тогда и только тогда, когда его сопряженный T^* есть оператор $D_{\nu,\delta,p}$ типа* [D], *где* $\nu=\dfrac{1}{\overline{\mu}^p}$, $\delta_n=\overline{\mu}^n\overline{\gamma_n}$.

Доказательство. Оператор T имеет вид $C_{\mu,\alpha,p}$ тогда и только тогда, когда его сопряженный имеет матрицу, состоящую из элементов вида

$$t^*_{jk}=\overline{c_{kj}}=\overline{\mu}^k\overline{\gamma_{k+pj}}=\left(\frac{1}{\overline{\mu}^p}\right)^j\left(\left(\overline{\mu}\right)^{k+pj}\overline{\gamma_{k+pj}}\right)=\nu^j\delta_{k+pj},$$

где $\nu=\dfrac{1}{\overline{\mu}^p}$, $\delta=\overline{\mu}^n\overline{\gamma_n}$. □

Можно охарактеризовать скошенные μ-ганкелевы операторы рассматриваемых типов как операторы, удовлетворяющие некоторым коммутационным соотношениям.

***Теорема* 1.1.** *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Ограниченный оператор C в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ является скошенным μ-ганкелевым типа* [C] *в том и только том случае*, *когда выполнено следующее коммутационное соотношение*:

$$CS=\frac{1}{\mu^p}S^{*p}C. \qquad (1.5)$$

2. *Ограниченный оператор D в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ является скошенным ν-ганкелевым типа* [D] *в том и только том случае*, *когда выполнено следующее коммутационное соотношение*:

$$DS^p=\nu S^*D, \qquad (1.6)$$

где S – оператор сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Доказательство. 1. Пусть оператор C удовлетворяет (1.1). При всех $k,j\in\mathbb{Z}_+$ имеем

$$\langle CSe_k,e_j\rangle=\langle Ce_{k+1},e_j\rangle=\mu^j\gamma_{p(k+1)+j}=$$
$$=\frac{\mu^{j+p}}{\mu^p}\gamma_{pk+(j+p)}=\frac{1}{\mu^p}\langle Ce_k,e_{j+p}\rangle n=$$
$$=\frac{1}{\mu^p}\langle Ce_k,S^pe_j\rangle=\frac{1}{\mu^p}\langle S^{*p}Ce_k,e_j\rangle.$$

В силу ограниченности оператора C, отсюда следует (1.5).

Обратно, пусть выполняется (1.5). Тогда при $k,j\in\mathbb{Z}_+$, $k>0$ имеем

$$c_{jk}:=\langle Ce_k,e_j\rangle=\langle CSe_{k-1},e_j\rangle=$$
$$=\langle\frac{1}{\mu^p}S^{*p}Ce_{k-1},e_j\rangle=\frac{1}{\mu^p}\langle Ce_{k-1},S^pe_j\rangle n=$$
$$=\frac{1}{\mu^p}\langle Ce_{k-1},e_{j+p}\rangle=\frac{1}{\mu^p}c_{(j+p),(k-1)}.$$

Итерируя полученное равенство, имеем

$$c_{jk}=\frac{1}{\mu^{pk}}c_{(pk+j),0}=\mu^{-pk}c_{(pk+j),0}=\mu^j(\mu^{-(pk+j)}c_{(pk+j),0}).$$

Так как при $k=0$ последнее равенство очевидно, оператор C – скошенный μ-ганкелев типа [C], причем $\gamma_n=\mu^{-n}c_{n,0}$.

2. Переходя к сопряженному в (1.5), получаем, что оператор C будет μ-ганкелевым типа [C], если и только если

$$S^*C^*=\frac{1}{\overline{\mu}^p}C^*S^p. \qquad (1.7)$$

С другой стороны, в силу леммы 1.1 C будет μ-ганкелевым типа [C], если и только если C^* будет ν-ганкелевым типа [D], причем $\nu=\dfrac{1}{\overline{\mu}^p}$.

Поэтому, полагая в (1.7) $C^* = D$ и подставляя $\nu = \dfrac{1}{\overline{\mu}^p}$, получаем второе утверждение теоремы. □

2 Скошенные μ-ганкелевы операторы. Неунимодулярный случай

В этом разделе будет рассмотрен случай $|\mu| \neq 1$.

Следующие теоремы дают, в частности, условия ограниченности операторов рассматриваемых классов.

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $\mathcal{H}$ *– сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство,* $C = C_{\mu,\gamma,p} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *– скошенный* μ*-ганкелев оператор типа* [C].

1. *Пусть* $|\mu| < 1$. *Оператор* $C = C_{\mu,\gamma,p}$ *ограничен тогда и только тогда, когда* $(\gamma_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$. *При этом* C *является ядерным с нормой Гильберта – Шмидта*

$$\|C\|_{S_2} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu|^{2j} \left|\gamma_{pk+j}\right|^2 \right)^{1/2} \tag{2.1}$$

и следом

$$\mathrm{tr} C = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \gamma_{(p+1)n}. \tag{2.2}$$

2. *Пусть* $|\mu| > 1$. *Оператор* $C = C_{\mu,\gamma,p}$ *является ограниченным, если и только если* $(\mu^n \gamma_n) \in \ell^2$. *При этом* C *является ядерным с нормой Гильберта – Шмидта и следом, задаваемыми формулами* (2.1) *и* (2.2) *соответственно.*

Доказательство. 1. Так как

$$c_{jk} = \langle Ce_k, e_j \rangle = \langle e_k, C^* e_j \rangle,$$

то

$$\langle C^* e_j, e_k \rangle = \overline{c_{jk}} = \overline{\mu}^j \overline{\gamma_{pk+j}}.$$

Следовательно, если оператор C ограничен, то при всех $j \geq 0$

$$\left|\mu^j\right|^2 \sum_k \left|\gamma_{pk+j}\right|^2 = \sum_k \left|\mu^j\right|^2 \left|\gamma_{pk+j}\right|^2 = \sum_k \left|c_{jk}\right|^2 = \left\|C^* e_j\right\|^2 < \infty.$$

В частности, при всех $j = 0, 1, \ldots, p-1$ сходится ряд $\sum_k \left|\gamma_{pk+j}\right|^2$. Из этого следует, что $(\gamma_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, что и доказывает необходимость.

Для доказательства достаточности рассмотрим норму Гильберта – Шмидта

$$\|C\|_{S_2} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu|^{2j} \left|\gamma_{pk+j}\right|^2 \right)^{1/2}.$$

Поскольку сейчас $(\gamma_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, $|\mu| < 1$, то

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu|^{2j} \left|\gamma_{pk+j}\right|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|^{2j} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\gamma_{pk+j}\right|^2 \leq \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|^{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left|\gamma_n\right|^2 = \frac{1}{1-|\mu|^2} \|\gamma_n\|_{\ell^2}^2 < \infty.$$

Следовательно, C есть оператор Гильберта – Шмидта. Кроме того, он ядерный, поскольку его след

$$\mathrm{tr} C = \sum_{n=0}^{\infty} c_{nn} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \gamma_{(p+1)n}$$

конечен в силу неравенства Коши – Буняковского:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \gamma_{(p+1)n} \right| \leq \|\mu^n\|_{\ell^2}^2 \, \|\gamma_n\|_{\ell^2}^2.$$

2. Пусть $|\mu| > 1$. Если оператор C ограничен, то

$$Ce_0 = \sum_j \mu^j \gamma_j e_j. \text{ и } \sum_{j=0}^{\infty} \left|\mu^j \gamma_j\right| = \|Ce_0\|^2 < \infty.$$

Из этого следует, что $(\mu^n \gamma_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, что и доказывает необходимость.

Пусть теперь $(\mu^n \gamma_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Рассмотрим норму Гильберта-Шмидта оператора C

$$\|C\|_{S_2}^2 = \sum_j \sum_k \left|c_{jk}\right|^2 = \sum_j \sum_k |\mu|^{2j} \left|\gamma_{pk+j}\right|^2 =$$
$$= \sum_j \sum_k |\mu|^{-2pk} \left(|\mu|^{pk+j} \left|\gamma_{pk+j}\right| \right)^2 =$$
$$= \sum_k |\mu|^{-2pk} \sum_j \left(|\mu|^{pk+j} \left|\gamma_{pk+j}\right| \right)^2 \leq$$
$$\leq \sum_k \left(\frac{1}{|\mu|^{2p}} \right)^k \sum_n \left(|\mu|^n \left|\gamma_n\right| \right)^2 =$$
$$= \frac{1}{1 - \dfrac{1}{|\mu|^{2p}}} \|\mu^n \gamma_n\|_{\ell^2}^2 < \infty.$$

Следовательно, оператор C является оператором Гильберта – Шмидта.

Более того, оператор C является ядерным, поскольку его след $\mathrm{tr} C = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \gamma_{(p+1)n}$ конечен. В самом деле, последовательность $(\mu^n \gamma_n)$ ограничена. Поэтому найдется такая константа $K > 0$, что $|\gamma_n| < K / |\mu|^n$ при всех n. Следовательно,

$$\left|\mu^n \gamma_{(p+1)n}\right| < |\mu|^n \frac{K}{|\mu|^{(p+1)n}} = K \left(\frac{1}{|\mu|^p} \right)^n. \qquad \square$$

***Теорема* 2.2.** *Пусть* $\mathcal{H}$ *– сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство,* $D = D_{\nu,\delta,p} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *– скошенный* μ*-ганкелев оператор типа* [D].

1. *Пусть* $|\nu|<1$. *Оператор* $D_{\nu,\delta,p}$ *ограничен, если и только если последовательность* $(\nu^{-2n/p}\delta_n)$ *принадлежит* ℓ^2. *При этом условии он также принадлежит к классу Гильберта – Шмидта и является ядерным, и*

$$\|D\|_{S_2}=\left(\sum_j\sum_k|\nu|^{2j}\left|\delta_{k+pj}\right|^2\right)^{1/2}, \qquad (2.3)$$

и следом

$$\mathrm{tr}D=\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n\delta_{(p+1)n}. \qquad (2.4)$$

2. *Пусть* $|\nu|>1$. *Оператор* $D_{\nu,\delta,p}$ *ограничен, если и только если последовательность* $(\nu^{-n/p}\delta_n)$ *принадлежит* ℓ^2. *При этом условии он также является ядерным с нормой Гильберта – Шмидта и следом, задаваемыми формулами* (2.3) *и* (2.4) *соответственно.*

Доказательство. По лемме 1.1

$$D_{\nu,\delta,p}=C^*_{\mu,\gamma,p},$$

где $\nu=\overline{\mu}^{-p}$, $\delta_n=\overline{\mu}^n\overline{\gamma_n}$. Следовательно, $\mu=\overline{\nu}^{-1/p}$, $\gamma_n=\overline{\nu}^{-n/p}\overline{\delta_n}$.

1. Если $|\nu|<1$, то $|\mu|>1$. Поскольку ограниченность оператора равносильна ограниченности его сопряженного, в силу теоремы 2.1 оператор $C^*_{\mu,\gamma,p}$, а вместе с ним и оператор $D_{\nu,\delta,p}$, будут ограничены тогда и только тогда, когда ограничен оператор $C_{\mu,\gamma,p}$, т. е. когда последовательность $\mu^n\gamma_n=\overline{\nu}^{-2n/p}\overline{\delta_n}$ принадлежит ℓ^2, что равносильно первому утверждению.

Аналогично, поскольку принадлежность оператора классу Гильберта – Шмидта (ядерность) равносильна принадлежности классу Гильберта – Шмидта (соответственно ядерности) его сопряженного, то при условии $(\nu^{-2n/p}\delta_n)\in\ell^2$ оператор $D_{\nu,\delta,p}$ принадлежит к классу Гильберта – Шмидта и является ядерным, причем

$$\|D\|_{S_2}=\left(\sum_j\sum_k\left|d_{jk}\right|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_j\sum_k|\nu|^{2j}\left|\delta_{k+pj}\right|^2\right)^{1/2},$$

и

$$\mathrm{tr}D=\sum_n d_{nn}=\sum_n\nu^n\delta_{(p+1)n}.$$

2. Пусть $|\nu|>1$, т. е. $|\mu|<1$. Как и в случае 1 в силу теоремы 2.1 операторы $C^*_{\mu,\gamma,p}$ и $D_{\nu,\delta,p}$ будут ограничены тогда и только тогда, когда ограничен оператор $C_{\mu,\gamma,p}$, то есть когда последовательность $\gamma_n=\overline{\nu}^{-n/p}\overline{\delta_n}$ принадлежит ℓ^2, что равносильно первому утверждению.

Поскольку ядерность оператора равносильна ядерности его сопряженного, то при условии $(\nu^{-n/p}\delta_n)\in\ell^2$ оператор $D_{\nu,\delta,p}$ также является ядерным с нормой Гильберта – Шмидта и следом, задаваемыми формулами (2.3) и (2.4) соответственно. □

3 Скошенные μ-ганкелевы операторы. Унимодулярный случай

В этом разделе будет рассмотрен случай $|\mu|=1$. Ниже будет показано, что теория таких операторов фактически сводится к теории скошенных ганкелевых операторов, рассмотренных в [18], [10].

***Определение* 3.1** [18]. Оператор L в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется *скошенным ганкелевым порядка p*, если для некоторого ортонормированного базиса $(e_k)_{k\ge 0}\subset\mathcal{H}$ матрица этого оператора состоит из элементов вида

$$l_{jk}:=\langle Le_k,e_j\rangle=\alpha_{pk+j}.$$

Следующая теорема показывает, что в унимодулярном случае скошенные μ-ганкелевы операторы типов [C] и [D] сводятся к скошенным ганкелевым.

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $|\mu|=1$.

1. *Пусть* $C=C_{\mu,\gamma,p}$ *– скошенный* μ*-ганкелев оператор типа* [C] *порядка p. Тогда существует такой унитарный оператор* $V:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, *что для некоторого скошенного ганкелева оператора L порядка p в* $\mathcal{H}$

$$C=V^{-1}L.$$

2. *Пусть* $D=D_{\nu,\delta,p}$ *– скошенный* ν*-ганкелев оператор типа* [D] *порядка p. Тогда существует такой унитарный оператор* $V:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, *что для некоторого скошенного ганкелева оператора L порядка p в* $\mathcal{H}$

$$D=L^*V.$$

Доказательство. Определим линейный оператор $V:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ по правилу $Ve_{k'}:=\mu^{-k}e_k$ (и далее по линейности). Он является унитарным, так как биективен и изометричен в силу условия $|\mu|=1$.

1. Определим оператор $V:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ формулой

$$V\left(\sum_{j=0}^{\infty}x_je_j\right):=\sum_{j=0}^{\infty}\overline{\mu}^jx_je_j.$$

Этот оператор в данном базисе имеет диагональную матрицу

$$\langle Ve_k,e_j\rangle=\mathrm{diag}(1,\overline{\mu},\overline{\mu}^2,\ldots).$$

Он унитарен, поскольку $|\mu|=1$ (имеем $V^*=V^{-1}$). Пусть $L:=VC$. Так как

$$V^*e_j=V^{-1}e_j=\mu^je_j,$$

то $\forall j,k$

$$\langle Le_k,e_j\rangle=\langle VCe_k,e_j\rangle=\langle Ce_k,V^*e_j\rangle=\langle Ce_k,\mu^j e_j\rangle=$$
$$=\overline{\mu}^j\langle Ce_k,e_j\rangle=\overline{\mu}^j\mu^j\gamma_{pk+j}=\gamma_{pk+j}.$$

Значит, L – скошенный ганкелев порядка p в $\mathcal{H}$.

2. Пусть $C=C_{\mu,\gamma,p}$ –сопряженный к оператору $D=D_{\nu,\delta,p}$ (лемма 1.1). Переходя в предыдущем равенстве к сопряженному и учитывая, что $V^{-1}=V^*$, получаем, что $D=C^*=L^*V$, что и требовалось доказать. □

***Следствие* 3.1.** *Пусть* $|\mu|=1$.

1. *Скошенный* μ*-ганкелев оператор* $C=C_{\mu,\gamma,p}$ *ограничен в пространстве* $\mathcal{H}$, *если и только если ограничен скошенный ганкелев оператор L.*

2. *Скошенный* μ*-ганкелев оператор* $D=D_{\nu,\delta,p}$ *ограничен в пространстве* $\mathcal{H}$, *если и только если ограничен скошенный ганкелев оператор L.*

4 Приложения к интегральным операторам в пространстве Харди H^2

В данном разделе будут рассмотрены классы интегральных операторов в пространстве Харди, являющихся операторами типа [C] и [D].

Напомним, что *пространство Харди* $H^2(\mathbb{D})$ состоит из таких функций *f*, аналитических в открытом единичном круге $\mathbb{D}$ комплексной плоскости, для которых последовательность (f_n) их тейлоровских коэффициентов в нуле принадлежит пространству $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Это сепарабельное гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle f,g\rangle:=\sum_{j=0}^{\infty}f_j\,\overline{g_j}.$$

Последовательность мономов $e_k(z)=z^k$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$ образует ортонормированный базис пространства $H^2(\mathbb{D})$ (см. например, [16]).

Всюду ниже σ обозначает ограниченную положительную меру на $\mathbb{D}$, а

$$\rho_n:=\int_{\mathbb{D}}\zeta^n d\sigma(\zeta)\ \ (n\in\mathbb{Z}_+)$$

– последовательность моментов меры σ.

Рассмотрим следующий оператор в пространстве $H^2(\mathbb{D})$ $(p\in\mathbb{N})$

$$(Hf)(z)=(H_{\mu,\sigma,p}f)(z):=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(\zeta^p)}{1-\mu\zeta z}d\sigma(\zeta)\ \ \left(|z|<1\right).$$

Этот оператор принадлежит классу хаусдорфовых операторов с ядром, зависящим от внешней переменной, впервые рассмотренному в работе первого автора [17].

***Теорема* 4.1.** *Будем предполагать, что* $|\mu|<1$. *Для того чтобы оператор* $H_{\mu,\sigma,p}$ *был ограничен в пространстве* $H^2(\mathbb{D})$ *необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$\sup_k\sum_j\left|\mu^j\rho_{kp+j}\right|^2<\infty. \qquad (4.1)$$

При условии (4.1) *справедливы следующие утверждения*:

1. $H_{\mu,\sigma,p}=C_{\mu,\rho,p}$.

2. *Оператор* $H_{\mu,\sigma,p}$ *ограничен в пространстве* $H^2(\mathbb{D})$, *если и только если последовательность* (ρ_n) *принадлежит* ℓ^2. *При этом условии он принадлежит классу Гильберта – Шмидта и является ядерным*, *причем*

$$\|H\|_{S_2}\le\int_{\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{\left(1-|\mu\zeta|\right)\left(1-|\zeta|^p\right)},$$

$$\operatorname{tr}H=\int_{\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{1-\mu\zeta^{p+1}}.$$

Доказательство. Если оператор $H_{\mu,\sigma,p}$ ограничен, то, разлагая подынтегральную функцию в геометрический ряд, получаем в результате почленного интегрирования

$$(H_{\mu,\sigma,p}e_k)(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{\zeta^{kp}}{1-\mu\zeta z}d\sigma(\zeta)=$$
$$=\int_{\mathbb{D}}\zeta^{kp}\sum_j\mu^j\zeta^j z^j d\sigma(\zeta)=\sum_j\mu^j z^j\int_{\mathbb{D}}\zeta^{kp+j}d\sigma(\zeta)=$$
$$=\sum_j\mu^j\rho_{kp+j}e_j(z). \qquad (4.2)$$

Почленное интегрирование законно в силу теоремы Лебега о почленном интегрировании ряда, поскольку

$$\sum_j\int_{\mathbb{D}}\left|\mu^j z^j\zeta^{kp+j}\right|d\sigma(\zeta)\le$$
$$\le\sum_j|\mu z|^j\int_{\mathbb{D}}d\sigma(\zeta)=\frac{1}{1-|\mu z|}\sigma(\mathbb{D})<\infty.$$

Отсюда следует (4.1), так как при всех $k\ge 0$

$$\sum_j\left|\mu^j\rho_{kp+j}\right|^2=\left\|H_{\mu,\sigma,p}e_k\right\|^2\le\left\|H_{\mu,\sigma,p}\right\|.$$

1. Из (4.2) следует, что при всех $k,j\ge 0$

$$\langle H_{\mu,\sigma,p}e_k,e_j\rangle=\mu^j\rho_{kp+j},$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

2. Теперь в силу утверждения 1 теоремы 2.1 (при $\gamma_n=\rho_n$) оператор $H_{\mu,\sigma,p}$ ограничен, если и только если последовательность (ρ_n) принадлежит ℓ^2. При этом условии он также принадлежит классу Гильберта – Шмидта и является ядерным, и

$$\|H\|_{S_2}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\mu|^{2j}\left|\rho_{pk+j}\right|^2\right)^{1/2}=$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\mu|^j\left|\int_{\mathbb{D}}\zeta^{kp+j}d\sigma(\zeta)\right|\le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\mu|^j\int_{\mathbb{D}}|\zeta|^{kp+j}d\sigma(\zeta)=$$

$$=\int_{\mathbb{D}}\sum_{j=0}^{\infty}|\mu\zeta|^j\sum_{k=0}^{\infty}|\zeta|^{pk}d\sigma(\zeta)=$$

$$=\int_{\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{\left(1-|\mu\zeta|\right)\left(1-|\zeta|^p\right)}.$$

Выше мы воспользовались неравенством

$$\left(\sum_n a_n^2\right)^{1/2}\le\sum_n a_n\quad (a_n\ge 0).$$

Наконец, снова по теореме 2.1

$$\mathrm{tr}H=\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n\rho_{(p+1)n}=\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n\int_{\mathbb{D}}\zeta^{(p+1)n}d\sigma(\zeta)=$$

$$=\int_{\mathbb{D}}\sum_{n=0}^{\infty}(\mu\zeta^{p+1})^n d\sigma(\zeta)=\int_{\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{1-\mu\zeta^{p+1}}.\qquad\square$$

Рассмотрим также следующий оператор в пространстве $H^2(\mathbb{D})$ $(p\in\mathbb{N})$

$$(\Gamma f)(z)=(\Gamma_{\nu,\sigma,p}f)(z):=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(\zeta)}{1-\nu\zeta^p z}d\sigma(\zeta)\ \left(|z|<1\right).$$

***Теорема* 4.2.** *Будем предполагать, что* $|\nu|<1$. *Для того чтобы оператор* $\Gamma_{\nu,\sigma,p}$ *был ограничен в пространстве* $H^2(\mathbb{D})$ *необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$\sup_k\sum_j\left|\nu^j\rho_{k+pj}\right|^2<\infty.$$

При условии (4.3) *справедливы следующие утверждения*:

1. $\Gamma_{\nu,\sigma,p}=D_{\nu,\delta,p}$.

2. *Оператор* $\Gamma_{\nu,\sigma,p}$ *ограничен в пространстве* $H^2(\mathbb{D})$, *если и только если последовательность* $(\nu^{-2n/p}\rho_n)\in\ell^2$. *При этом условии он также принадлежит классу Гильберта – Шмидта и является ядерным*, *и*

$$\|\Gamma\|_{S_2}\le\int_{\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{\left(1-|\nu||\zeta|^p\right)\left(1-|\zeta|\right)},$$

$$\mathrm{tr}\Gamma=\int_{\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{1-\nu\zeta^{p+1}}.$$

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 4.1, разлагая подынтегральную функцию в геометрический ряд, получаем в результате почленного интегрирования

$$(\Gamma_{\nu,\sigma,p}e_k)(z)=\int_{\mathbb{D}}\zeta^k\sum_{j=0}^{\infty}(\nu\zeta^p z)^j d\sigma(\zeta)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}z^j\int_{\mathbb{D}}\nu^j\zeta^{k+pj}d\sigma(\zeta)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\nu^j\rho_{k+pj}e_j(z).\qquad(4.4)$$

Почленное интегрирование законно в силу теоремы Лебега о почленном интегрировании ряда, поскольку

$$\sum_{j=0}^{\infty}|z|^j\int_{\mathbb{D}}|\nu|^j|\zeta|^{k+pj}d\sigma(\zeta)\le\sum_{j=0}^{\infty}|\nu|^j\sigma(\mathbb{D})<\infty.$$

Отсюда следует (4.4), так как при всех $k\ge 0$

$$\sum_j\left|\nu^j\rho_{k+pj}\right|^2=\left\|\Gamma_{\nu,\sigma,p}e_k\right\|^2\le\left\|\Gamma_{\nu,\sigma,p}\right\|.$$

1. Из формулы (4.4) следует, что

$$\langle\Gamma_{\nu,\sigma,p}e_k,e_j\rangle=\nu^j\rho_{k+pj},$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

2. Следовательно, в силу утверждения 1 теоремы 2.2 (при $\delta_n=\rho_n$) оператор $\Gamma_{\nu,\sigma,p}$ ограничен, если и только если последовательность $(\nu^{-2n/p}\rho_n)$ принадлежит ℓ^2. При этом условии он также принадлежит классу Гильберта – Шмидта и является ядерным, и

$$\|\Gamma\|_{S_2}=\left(\sum_j\sum_k|\nu|^{2j}\left|\rho_{k+pj}\right|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le\sum_j\sum_k|\nu|^j\left|\rho_{k+pj}\right|=\sum_j\sum_k|\nu|^j\left|\int_{\mathbb{D}}\zeta^{k+pj}d\sigma(\zeta)\right|\le$$

$$\le\sum_j\sum_k|\nu|^j\int_{\mathbb{D}}|\zeta|^{k+pj}d\sigma(\zeta)=$$

$$=\int_{\mathbb{D}}\sum_j\sum_k|\nu|^j|\zeta|^{pj}|\zeta|^k d\sigma(\zeta)=$$

$$=\int_{\mathbb{D}}\sum_j\left(|\nu||\zeta|^p\right)^j\sum_k|\zeta|^k d\sigma(\zeta)=$$

$$=\int_{\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{\left(1-|\nu||\zeta|^p\right)\left(1-|\zeta|\right)}.$$

Наконец, как и в доказательстве предыдущей теоремы

$$\mathrm{tr}\Gamma=\sum_{n=0}^{\infty}\nu^n\rho_{(p+1)n}=\int_{\mathbb{D}}\frac{d\sigma(\zeta)}{1-\nu\zeta^{p+1}}.\qquad\square$$

Заключение

В данной статье вводятся два типа операторов, действующих в гильбертовом пространстве, которые обобщают как класс μ-ганкелевых операторов, так и класс скошенных ганкелевых операторов. Были сформулированы и доказаны критерии их ограниченности и ядерности. Полученные результаты применяются к интегральным операторам в пространстве Харди. Эти результаты могут использоваться в теории операторов и ее приложениях, а также при чтении специальных дисциплин для студентов математических специальностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер*, *Н.И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер,

И.И. Глазман; 2-е изд. – Москва: Наука, 1966. – 544 с.

2. *Martínez-Avendaño*, *R.A.* An Introduction to Operators on the Hardy – Hilbert Space / R.A. Martínez-Avendaño, P. Rosenthal. – New York: Springer, 2007. – 229 p.

3. *Гохберг*, *И.Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – Москва: Наука, 1965. – 488 с.

4. *Канторович*, *Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – Изд. СПб: БХВ; изд. 4-е, испр. – 2004. – 816 с.

5. *Weidmann*, *J.* Linear Operators in Hilbert Spaces / J. Weidmann. – New York: Springer, 1980. – 415 p.

6. *Mirotin*, *A.R.* Compact Hankel operators on compact Abelian groups / A.R. Mirotin // St. Petersburg Math. J. – 2022. – Vol. 33, № 3. – P. 569–584. – DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1715.

7. *Nikolski*, *N.K.* Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 1: Hardy, Hankel, and Toeplits / N.K. Nikolski // Mathematical surveys and monographs. – 2002. – Vol. 92. – American Mathematical Society. – 438 p.

8. *Nikolski*, *N.K.* Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 2: Model Operators and Systems / N.K.Nikolski //Mathematical surveys and monographs. – 2002. – Vol. 93. – American Mathematical Society. – 438 p.

9. *Пеллер*, *В.В.* Операторы Ганкеля и их приложения / В.В. Пеллер. – Москва – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005. – 1028 с.

10. *Arora*, *S.C.* Slant Hankel opetators / S.C. Arora, Ruchica Batra, M.P. Singh // Arch. Math. (Brno). – 2006. – Vol. 42, № 2. – P. 125–133.

11. *Mirotin*, *A.R.* μ-Hankel operators on Hilbert spaces / A.R. Mirotin, E.Yu. Kuzmenkova // Opuscula Math. – 2021. – Vol. 41, № 6. – P. 881–898.

12. *Bhola*, *J.* Properties of (C, r)-Hankel operators and (R, r)-Hankel operators on Hilbert Spaces / J. Bhola, B. Gupta // Kragujevac Journal of Math. – 2025. – Vol. 49, № 6. – P. 873–887.

13. *Mirotin*, *A.R.* μ-Hankel operators on compact Abelian groups / A.R. Mirotin // Analysis Math. – 2023. – Vol. 49. – P. 617–640. – DOI: https://doi.org/10.1007/s10476-023-0217-3.

14. *Kuzmenkova*, *E.Yu.* On normal μ-Hankel operators / E.Yu. Kuzmenkova, A.R. Mirotin // Siberian Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 64. – P. 731–736.

15. *Кузьменкова*, *Е.Ю.* О скошенных μ-ганкелевых операторах / Е.Ю. Кузьменкова, А.Р. Миротин // Белорусская математическая конференция: матер. XIV Межд. научной конф. 28 октября – 1 ноября 2024 г. в 3 ч. Ч. 1. – Издательство ГНУ «Институт математики Национальной академии наук Беларуси». – Минск, 2024. – С. 63–64.

16. *Иосида*, *К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.

17. *Mirotin*, *A.R.* $L^q - L^p$ boundedness of generic Hausdorff-type operators with bi-variable kernels / A.R. Mirotin // J. Math Sci. – 2025. – DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-025-08016-4.

18. *Arora*, *S.*C. *k*th-order slant Hankel operators / S.C. Arora, J. Bhola // Math. Sci. Res. J. – 2008. – Vol. 12, № 3. – P. 53–63.

Поступила в редакцию 20.01.2026.

Информация об авторах

Миротин Адольф Рувимович – д.ф.-м.н., профессор

Кузьменкова Екатерина Юрьевна – ст. преподаватель