МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_47
EDN: JKDOYC

КРИТЕРИИ π-СПЕЦИАЛЬНОСТИ, МЕТА-π-СПЕЦИАЛЬНОСТИ И $(1, \pi')$-СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

И.М. Дергачева, Е.А. Задорожнюк, И.П. Шабалина

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

CRITERIA FOR π-SPECIALITY, META-π-SPECIALITY, AND $(1, \pi')$-SUPERSOLUBILITY OF A FINITE GROUP

I.M. Dergacheva, E.A. Zadorozhnyuk, I.P. Shabalina

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Аннотация. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' \subseteq \mathbb{P} \setminus \pi$. Группа G называется: (i) π-специальной, если $G = O_{p_1}(G) \times \cdots \times O_{p_t}(G) \times O_{\pi'}(G)$ для некоторых $p_1, \ldots, p_t \in \pi$; (ii) мета-π-специальной, если для некоторой нормальной подгруппы N группы G обе группы N и G / N являются π-специальными. Подгруппа A группы G называется $(1, \pi')$-субнормальной в G, если существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо секция $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является π'-группой. В данной работе мы доказываем новые критерии π-специальности, мета-π-специальности и сверхразрешимости группы. В частности, мы доказываем, что группа G является: (i) π-специальной, если каждая максимальная подгруппа группы G имеет $(1, \pi')$-субнормальное дополнение в G; (ii) сверхразрешимой, если каждая вторая максимальная подгруппа группы G имеет субнормальное дополнение в G; (iii) мета-π-специальной, если каждая третья максимальная подгруппа группы G имеет $(1, \pi')$-субнормальное дополнение в G.

Ключевые слова: *конечная группа*, *π-специальная группа*, *мета-π-специальная группа*, $(1, \pi')$*-сверхразрешимая группа*, $(1, \pi')$*-субнормальная подгруппа*.

Для цитирования: *Дергачева*, *И.М.* Критерии π-специальности, мета-π-специальности и $(1, \pi')$-сверхразрешимости конечной группы / И.М. Дергачева, Е.А. Задорожнюк, И.П. Шабалина // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 47–52. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_47. – EDN: JKDOYC

Abstract. Throughout this article, all groups are finite, and G always denotes a finite group; $\mathbb{P}$ is the set of all primes , $\pi \subseteq \mathbb{P}$ and $\pi' \subseteq \mathbb{P} \setminus \pi$. A group G is called: (i) π-special if $G = O_{p_1}(G) \times \cdots \times O_{p_t}(G) \times O_{\pi'}(G)$ for some $p_1, \ldots, p_t \in \pi$; (ii) meta-π-special if for some normal subgroup N of G both groups N and G / N are π-special. A subgroup A of G is called $(1, \pi')$-subnormal in G if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or the section $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is a π'-group. In this paper we prove new criteria for π-speciality, meta-π-speciality, and supersolvability of a group. In particular, we prove that a group G is: (i) π-special if every maximal subgroup of G has a $(1, \pi')$-subnormal complement in G; (ii) supersolvable if every second maximal subgroup of G has a subnormal complement in G; (iii) meta-π-special if every third maximal subgroup of G has a $(1, \pi)'$-subnormal complement in G.

Keywords: *fiinite group*, *π-special group*, *meta-π-special group*, $(1, \pi')$*-supersoluble group*, $(1, \pi')$*-subnormal subgroup*.

For citation: *Dergacheva*, *I.M.* Criteria for π-speciality, meta-π-speciality, and $(1, \pi')$-supersolubility of a finite group / I.M. Dergacheva, E.A. Zadorozhnyuk, I.P. Shabalina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 47–52. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_47 (in Russian). – EDN: JKDOYC

Введение

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' \subseteq \mathbb{P} \setminus \pi$.

Группа G называется:

(i) π-специальной [1], [2], если

$$G = O_{p_1}(G) \times \cdots \times O_{p_t}(G) \times O_{\pi'}(G)$$

для некоторых $p_1, \ldots, p_t \in \pi$;

(ii) мета-π-специальной, если для некоторой нормальной подгруппы N группы G обе группы N и G / N являются π-специальными.

Подгруппа A группы G называется $\mathfrak{F}$*-субнормальной в G в смысле Кегеля* [3] или K-$\mathfrak{F}$*-субнормальной* в G [4, 6.1.4], если существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_t = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо секция $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

***Определение* 0.1.** Мы говорим, следуя [5], что подгруппа A группы G является $(1, \pi')$*-субнормальной в G*, если A K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G, где $\mathfrak{F}$ – класс всех π'-групп.

Главный фактор H / K группы G называется:

(i) $\mathfrak{F}$-центральным (в G), если

$$(H / K) \rtimes (G / C_G(H / K)) \in \mathfrak{F};$$

(ii) $(1, \pi')$*-центральным* (в G), если $(H / K) \rtimes (G / C_G(H / K))$ – π-специальная группа.

Нормальная подгруппа N называется $\mathfrak{F}$-гиперцентральной (соответственно, $(1, \pi')$*-гиперцентральной*) в G, если каждый главный фактор группы G ниже N является $\mathfrak{F}$-центральным (соответственно, $(1, \pi')$-центральным) в G.

***Определение* 0.2.** Мы говорим, следуя [6], что группа G является $(1, \pi')$*-сверхразрешимой*, если каждый главный фактор группы G ниже π-специального корадикала группы G является циклическим.

В данной работе мы доказываем следующие результаты.

***Теорема* 0.3.** *Группа G является π-специальной в том и только в том случае, когда группа G π-разрешима и для каждой ее максимальной подгруппы M в этой группе имеется* $(1, \pi')$*-субнормальное добавление T к M такое, что* $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$*-гиперцентральная в G подгруппа.*

***Следствие* 0.4.** *Группа G является нильпотентной в том и только в том случае, когда группа G разрешима и для каждой максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется субнормальное добавление T к M такое, что* $(M \cap T)^G$ *– гиперцентральная в G подгруппа.*

***Теорема* 0.5.** *Если группа G π-разрешима и для каждой второй максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется* $(1, \pi')$*-субнормальное добавление T к M такое, что* $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$*-гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является* $(1, \pi')$*-сверхразрешимой.*

***Следствие* 0.6.** *Если группа G разрешима и для каждой второй максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется субнормальное добавление T к M такое, что* $(M \cap T)^G$ *– гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является сверхразрешимой.*

***Теорема* 0.7.** *Если группа G π-разрешима и для каждой третьей максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется* $(1, \pi')$*-субнормальное добавление T к M такое, что* $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$*-гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является мета-π-специальной.*

***Следствие* 0.8.** *Если группа G разрешима и для каждой третьей максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется субнормальное добавление T к M такое, что* $(M \cap T)^G$ *– гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является метанильпотентной.*

2 Некоторые предварительные результаты

***Лемма* 1.1** [7, лемма 2.6]. *Пусть A, K, N – подгруппы группы G, где A является* $(1, \pi')$*-субнормальной подгруппой, а N – нормальной подгруппой в G.*

(1) $A \cap K$ – $(1, \pi')$*-субнормальная подгруппа в K.*

(2) AN / N – $(1, \pi')$*-субнормальная подгруппа в* G / N.

(3) *Если* $N \le K$ *и* K / N *является* $(1, \pi')$*-субнормальной подгруппой в* G / N, *то K является* $(1, \pi')$*-субнормальной подгруппой в G.*

(4) *π-специальный корадикал группы A является субнормальным в G.*

(5) *Если A является π-специальной группой, то* A^G *является π-специальной группой. Более того, если A –* π'*-группа, то* A^G – π'*-группа, и если A – p-группа, для некоторого* $p \in \pi$, *то* A^G *– p-группа.*

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если каждый гомоморфный образ каждой $\mathfrak{F}$-группы является $\mathfrak{F}$-группой, и $G / (M \cap N) \in \mathfrak{F}$ для любых двух нормальных подгрупп M и N группы G таких, что $G / M, G / N \in \mathfrak{F}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *насыщенным*, если $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, (*нормально*) *наследственным*, если $H \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G \in \mathfrak{F}$ и H является (нормальной) подгруппой G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он нормально наследственный и замкнут относительно взятия произведений нормальных подгрупп.

***Лемма* 1.2.** (1) *Класс всех π-специальных групп является одновременно наследственной насыщенной формацией и классом Фиттинга* [7, следствие 2.4 и лемма 2.5].

(2) *Класс всех мета-π-специальных групп является одновременно наследственной насыщенной формацией и классом Фиттинга* [8, лемма 2.3].

(3) *Если N – нормальная* $(1, \pi')$*-гиперцентральная в G подгруппа и* G / N *π-специальна то G π-специальна* [9, 1, 2.6].

***Лемма* 1.3** [9, 1, 2.6]. *Пусть A, K, N – подгруппы группы G, где A является $(1,\pi')$-гиперцентральной подгруппой, а N – нормальной подгруппой в G.*

(1) $A\cap K$ – *$(1,\pi)'$-гиперцентральная подгруппа в K.*

(2) AN/N – *$(1,\pi')$-гиперцентральная подгруппа в G/N.*

(3) *Если $N\le K$ и K/N является $(1,\pi')$-гиперцентральной подгруппой в G/N, то K является $(1,\pi')$-гиперцентральной в G.*

***Лемма* 1.4.** *Если G является минимальной не π-специальной группой, то G является группой Шмидта.*

Доказательство. Понятно, что *G* является минимальной не π-разложимой группой. Следовательно, *G* является группой Шмидта согласно [10]. □

***Лемма* 1.5** [11, III, 5.2]. *Если G – группа Шмидта, то $G=P\rtimes Q$, где $P=P^{\mathfrak{N}}=G'$ – силовская p-подгруппа G, $P/\Phi(P)$ – главный фактор G, и $Q=\langle x\rangle$ – циклическая силовская q-подгруппа G с $\langle x^q\rangle\le Z(G)\cap\Phi(G)$.*

3 Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 0.3. Предположим, что эта теорема не является верной и пусть *G* – контрпример минимального порядка. Пусть *R* – минимальная нормальная подгруппа группы *G*. Тогда *R* является либо π'-группой, либо *p*-группой для некоторого $p\in\pi$, поскольку *G* является π-разрешимой по условию.

(1) G/R – *π-специальная группа.*

Если M/R – максимальная подгруппа G/R, то *M* – максимальная подгруппа *G* и, следовательно, *M* имеет $(1,\pi')$-субнормальное добавление *T* в группе *G* такое, что $(M\cap T)^G$ – $(1,\pi')$-гиперцентральная в *G* подгруппа согласно условию. Ввиду леммы 1.1 (2), TR/R – $(1,\pi')$-субнормальная в группе G/R подгруппа. Кроме того, $(TR/R)(M/R)=G/R$ и

$$TR/R\cap M/R=R(T\cap M)/R,$$

где

$$(TR/R\cap M/R)^{G/R}=((TR\cap M)/R)^{G/R}=$$
$$=(R(T\cap M)/R)^{G/R}=$$
$$=(R(T\cap M))^G/R=R(T\cap M)^G/R$$

и $R(T\cap M)^G/R$ – $(1,\pi')$-гиперцентральная в G/R подгруппа ввиду *G*-изоморфизма

$$R(T\cap M)^G/R\simeq(T\cap M)^G/((T\cap M)^G\cap R)$$

и леммы 1.3 (2). Таким образом, TR/R – такое $(1,\pi)'$-субнормальное добавление к подгруппе M/R в группе G/R, что $(M/R\cap TR/R)^{G/R}$ – $(1,\pi')$-гиперцентральная в G/R подгруппа. Следовательно, гипотеза верна для G/R, поэтому G/R является π-специальной группой по выбору *G*.

(2) *R – единственная минимальна подгруппа в G и $R\nleq\Phi(G)$. В частности, $C_G(R)\le R$ и в G имеется такая максимальная подгруппа M, что $G=RM$ и $M_G=1$.*

Если *N* – минимальная нормальная подгруппа группы *G* и $N\ne R$, то $N\cap R=1$ и поэтому $G\simeq G/1=G/(N\cap R)$ является π-специальной группой согласно леммы 1.2 (1), в отличие от выбора группы *G*. Отсюда следует, что *R* – единственная минимальна подгруппа в *G* и $R\nleq\Phi(G)$, поскольку, согласно лемме 1.2 (1), класс всех π-специальных групп является насыщенной формацией.

Пусть теперь *M* – такая максимальная подгруппа в *G*, что $RM=G$ и пусть $C=C_G(R)$. Тогда $M_G=1$. Предположим, что $C\ne1$. Тогда $R\le C$, поскольку *C* – нормальная в *G* подгруппа и *R* – единственная минимальна подгруппа в *G*. Следовательно,

$$C_G(R)\cap RM=R(C_G(R)\cap M),$$

где $C_G(R)\cap M$ нормальна в *G* и поэтому $C_G(R)\cap M\le M_G=1$. Следовательно, $C_G(R)\le R$.

(3) *R* не является π'-группой.

Предположим, что *R* является π'-группой и пусть V/R – холлова π'-подгруппа в G/R. Поскольку G/R является π-специальной групой, то V/R – нормальная подгруппа в G/R. Следовательно, $V=O_{\pi'}(G)$ является холловской π'-подгруппой группы *G* и *V* π'-специальна, поэтому $R\le V<G$. Тогда *M* не содержит *V*. Пусть *T* – такое $(1,\pi')$-субнормальное добавление к *M* в группе *G*, что $(T\cap M)^G$ является $(1,\pi')$-гиперцентральной в *G*. Если $(T\cap M)^G\ne1$, то $R\le(T\cap M)^G$ поскольку *R* – единственная минимальная нормальная подгруппа *G*. Но тогда *R* $(1,\pi')$-центральна в *G* и это влечет π-специальность группы ввиду леммы 1.2 (2). Полученное противочечие показывает, что $(T\cap M)^G=1$ и поэтому *T* дополнением к *M* в *G*.

Тогда $T\ne1$ и $T\cap V=1$, следовательно, $T\simeq TV/V$ является π-специальной π-группой ввиду утверждения (1). Отсюда следует, что *T* нильпотентна. Пусть теперь $p\in\pi(T)$ и *p* – силовския *p*-подгруппа в *T*. Тогда *p* – $(1,\pi')$-субнормальная подгруппа в группе *G* и, следовательно, $1 < P \le O_p(G)$ согласно лемме 1.1 (5), что влечет $R \le O_p(G)$ ввиду утверждения (1) и поэтому $p \in \pi'$. Полученное противоречие завершает доказательство утвеждения (3).

Заключительное противоречие. Рассуждая аналогично рассуждениям, применяемым при доказательстве утвеждения (3), можно показать, что R не является p-группой для всех $p \in \pi$. Но это невозможно ввиду утвеждения (3), поскольку группа G является π-разрешимой согласно условию. Это заключительное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Доказательство теоремы 0.5. Предположим, что эта теорема не является верной и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда G не является π-специальной группой и если R – минимальная нормальная подгруппа группы G, то R является либо π'-группой, либо p-группой для некоторого $p \in \pi$.

(1) *Каждая максимальная подгруппа группы G является π-специальной.*

Пусть M – произвольная максимальная подгруппа в G и пусть L – произвольная максимальная подгруппа в M. Тогда, согласно условию теоремы, в G имеется такое $(1, \pi')$-субнормальное добавление к L в группе G, что подгруппа $(T \cap L)^G$ является $(1, \pi')$-гиперцетральной в G. Тогда $M = M \cap LT = L(M \cap T)$, где $M \cap T$ является $(1, \pi')$-субнормальным добавлением к L в группе M согласно лемме 1.1 (1).С другой стороны, ввиду леммы 1.3 (1), подгруппа $M \cap T$ является $(1, \pi')$-гиперцент-ральной в M. Таким образом, M является π-специальной согласно теореме 1.2.

(2) *G является группой Шмидта. В частности, $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}} = G'$ является силовской p-подгруппой G, а $Q = \langle x \rangle$ является циклической силовской q-подгруппой G для некоторых простых чисел p и q.*

Согласно утверждению (1), каждая максимальная подгруппа группы G является π-специальной. Таким образом, G – минимальная не π-специальная группа и поэтому G – группа Шмидта ввиду леммы 1.4. Следовательно, мы имеем (2) ввиду леммы 1.5.

(3) *Каждая $(1, \pi')$-гиперцетральная в G подгруппа является гиперцентральной в G, а каждая $(1, \pi')$-субнормальная в G подгруппа является субнормальной в G.*

Действительно, группа G не является π-специальной и поэтому холловская π'-под-группа группы G является силовской в G ввиду утверждения (2). Таким образом, каждая секция K / L группы G, являющаяся π'-группой, является R-группой для некоторого простого числа R. Из этого вытекает утвеждение (3).

Заключительное противоречие. Заметим, что $P / \Phi(P)$ является нециклическим главным фактором G, поскольку G не является $(1, \pi')$-сверхразрешимой, и, в частности, G не является сверхразрешимой. Сначала предположим, что $|Q| = q$. Тогда p является максимальной подгруппой G, поэтому максимальная подгруппа V группы p имеет субнормальное добавление T в G такое, что $(T \cap V)^G$ является гиперцентральной подгруппой в G.

Прежде предположим, что $T = G$. Тогда $P = (T \cap V)^G \le Z_\infty(G)$, что влечет нильпотентность группы G, что противоречит выбору этой группы, поэтому $T < G$ и, следовательно, T является нильпотентной группой. Тогда група $G = PT$ является π-специальной группой согласно лемме 1.1 (5), поскольку G является произведением двух π-специальных групп $(1, \pi')$-субнормальных подгрупп p и T, что приводит к противоречию.

Следовательно, $|Q| > q$. Пусть V – вторая максимальная подгруппа группы q и $M = PV$.

Тогда

$$|G : M| = |PQ : PV| = |Q : V| = q^2,$$

следовательно, для некоторой субнормальной подгруппы T группы G имеем $G = VT$ и $(V \cap T)^G$ является гиперцентральной подгруппой в G.

Тогда $T \ne G$ и $Q = V \times (Q \cap T)$. Отсюда следует, что $V = 1$, следовательно, p является второй максимальной подгруппой группы G, поэтому q является субнормальной в G по гипотезе, что влечет $G = PQ$ является нильпотентной и мы снова приходим к противоречию. □

Доказательство теоремы 0.7. Предположим, что эта теорема не является верной и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда G не является π-специальной группой и если R – минимальная нормальная подгруппа группы G, то R является либо π'-группой, либо p-группой для некоторого $p \in \pi$.

Пусть H – холлова π'-подгруппа и p – силовская p-подгруппа в G.

(1) *Группа G / R мета-π-специальна.*

Если G / R не имеет третьей максимальной подгруппы, то это очевидно.

Теперь предположим, что G / R имеет третью максимальню подгруппу M / R. Тогда M – третья максимальная подгруппа в группе G и поэтому в этой группе имеется $(1, \pi')$-субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$-гиперцентральная в G подгруппа по гипотезе.

Тогда TR/R является $(1,\pi')$-субнормальным добавлением к M/R в G/R по лемме 1.1 (2). Кроме того,

$$(TR/R \cap M/R)^{G/R} = R(T \cap M)^G / R$$

– $(1,\pi')$-гиперцентральная в G/R подгруппа (см. утверждение (1) в доказательстве теоремы 0.3). Следовательно, гипотеза верна для G/R, поэтому G/R является мета-π-специальной группой по выбору *G*.

(2) *R – единственная минимальна подгруппа в G и $R \not\leq \Phi(G)$. В частности, $C_G(R) \leq R$. Кроме того, фактор $R/1$ не является $(1,\pi')$-центральной в G.*

Если N – минимальная нормальная подгруппа группы *G* и $N \neq R$, то $N \cap R = 1$ и поэтому $G \simeq G/1 = G/(N \cap R)$ является мета-π-специальной группой, поскольку класс всех мета-π-специальных групп является насыщенной формацией (см. лемму 1.2 (3)), что противоречит выбору группы *G*. Отсюда следует, что *R* – единственная минимальна подгруппа в G и $R \not\leq \Phi(G)$.

Пусть теперь *M* – такая максимальная подгруппа в *G*, что $RM = G$ и пусть $C = C_G(R)$. Тогда $M_G = 1$ и $C_G(R) \leq R$ (см. утверждение (1) в доказательстве теоремы 0.3.

(3) $|R|$ *не является простым числом*.

Действительно, если $|R| = p$ – простое число, то ввиду (2), $G/R = G/C_G(R)$ – подгруппа циклической группы $Aut(R)$ и поэтому *G* является метанильпотентной и, следовательно, мета-π-специальной группой, что противоречит выбору группы *G*. Таким образом, имеет место (3).

(4) *Если R – π'-группа, то в группе G имется такая неединичная третья максимальная под-группа V, что $|G:V|$ не является π'-числом и либо V – максимальная подгруппа в R, либо $R \leq V$.*

Пусть *W* – максимальная подгруппа в *R*. Тогда $W \neq 1$ ввиду утверждения (3).

Понятно, что $R \leq H \neq G$ и поэтому $\pi \cap \pi(G) \neq \varnothing$. Пусть *M* – максимальная подгруппа в *G*, содержащая *H*. Тогда $|G:M| = p^n$ является *p*-числом для некоторого $p \in \pi$, поскольку группа G π-разрешима и $|G:M|$ является π-чисом.

Если $H = M$, то $R < H$, поскольку в противном случае R и G/R являются π-специальными группами и поэтому группа *G* в этом случае является мета-π-специальной, что противоречит выбору группы *G*. Если *R* максимальна в *H*, то $W = V$ – третья максимальная подгруппа в G и $|G:V|$ не является π'-числом. Если же $R \leq L < H$ для некоторой максимальной подгруппы *L* группы *H*, то в *G* имеется такая третья максимальная подгруппа *V*, что либо $V = W$, либо $R \leq V$ и $V \leq H$ и поэтому $|G:V|$ не является π'-числом.

Предположим теперь, что $H \leq L < M$ для некоторой второй максимальной подгруппы *L* группы *G*. Предположим, $H < L$ и пусть *V* – такая максимальна подгруппа в группе *L*, что $R \leq H \leq V$. Тогда $|G:V|$ не является π'-числом поскольку *H* – холлова π'-подгруппа в *G*.

Теперь предположим, $H = L$. Если $R = H$, то *W* – 3-максимальная подгруппа в *G* и $|G:W|$ не является π'-числом. Пусть теперь $H < L$ и V – максимальная подгруппа в L такая, что $H \leq V$. Тогда $|G:V|$ не является π'-числом и $R \leq V$.

(5) *Если R – p-группа для некоторого $p \in \pi$, то в группе G имется такая неединичная третья максимальная подгруппа V, что $|G:V|$ не является p-числом и либо V – максимальная подгруппа в R, либо $R \leq V$.*

Это утверждение доказывается аналогично утверждению (4).

(6) *Если T – $(1,\pi')$-субнормальное добавление к V в G такое, что $(V \cap T)^G$ является $(1,\pi')$-гиперцентральной в G, то $(V \cap T)^G = 1$ и π-специальный корадикал W группы T не является единичной группой.*

Действительно, предположим, что $W = 1$. Тогда, ввиду леммы 1.2 (1), *W* является π-специальной группой.

Прежде предположим, что R – π'-группа. Тогда ввиду утверждения (4), для некоторого $p \in \pi$ имеет место $E := O_p(T) \neq 1$ и E является $(1,\pi')$-субнормальной подгруппой в *G* и поэтому $(O_p(T))^G$ – нормальная *p*-подгруппа в *G* согласно лемме 1.1 (5), что невозможно ввиду (1). Если же *R* – *p*-группа, для некоторого $p \in \pi$, то ввиду утверждения (4), имеет место $B := O_{\pi'}(T) \neq 1$ и тогда $(O_p(T))^G$ – нормальная π'-подгруппа в *G* согласно лемме 1.1 (5), что невозможно ввиду (1). Таким образом, мы имеем (6).

Заключительное противоречие. Ввиду (6), π-специальный корадикал *W* группы *T* является неединичной группой и *W* субнормальна в *G* по лемме 1.1 (4). Но тогда $R \leq N_G(W)$ и

$$G = VT = RT,$$

что влечет нормальность подгруппы *W* в *G*. Таким образом,

$$R \leq W \leq T < G,$$

согласно утверждению (2). Это заключительное противоречие завершает доказательство теоремы. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chunikhin*, *S.A*. Subgroups of finite groups / S.A. Chunikhin. – Minsk: Nauka i Tehnika, 1964.

2. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.

3. *Kegel*, *O.H*. Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – S. 225–228.

4. *Ballester-Bolinches*, *A*. Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, Dordrecht, 2006.

5. *Wang*, *M*. On two classes of sublattices for a subgroup lattice of a finite group / M. Wang, A-Ming Liu, A.N. Skiba // Mathematics. – 2026. – Vol. 14. – DOI: https://doi.org/10.3390/math14020328.

6. *Guo*, *W*. On σ-supersoluble groups and one generalization of *CLT*-groups / W. Guo, A.N Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 512. – P. 92–108.

7. *Skiba*, *A.N*. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

8. *Huang*, *J*. On weakly σ-quasinormal subgroups of finite groups / J. Huang, B. Hu, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2011. – Vol. 78, № 1. – P. 209–218.

9. *Guo*, *W*. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo. – Springer, Heidelberg – NewYork – Dordrecht – London, 2015.

10. *Belonogov*, *V.A*. Finite groups all of whose 2-maximal subgroups are π-decomposable / V.A. Belonogov // Trudi Instituta Matematiki i Mekhaniki Uro RAN. – 2014. – Vol. 20, № 2. – P. 29–43.

11. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

Поступила в редакцию 14.02.2026.

Информация об авторах

Дергачева Ирина Михайловна – к.ф.-м.н., доцент
Задорожнюк Елена Андреевна – к.ф.-м.н., доцент
Шабалина Ирина Петровна – к.ф.-м.н., доцент