Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 3

УДК 517. 521 МАТЕМАТИКА

Я. С. БУГРОВ

О РЕГУЛЯРНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком С. М. Никольским 5 X 1973)

В теории суммируемости рядов Фурье вопрос о регулярности метода, порожденного нижней треугольной матрицей $\|\lambda_k^{(n)}\|$, сводится к вопросу о равномерной ограниченности (относительно n) в метрике L ядра этого метода

$$K_n(t)=\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt.$$

Различные условия равномерной ограниченности ядра на языке коэффициентов $\lambda^{(n)}$ были получены в работах многих авторов: С. М. Никольского, С. Б. Стечкина, А. В. Ефимова, Г. А. Фомина и др. В дальнейшем мы будем считать, что $\lambda_k^{(n)}=\lambda_k$, $\lambda_k=0$ при $k\geqslant n+1$, $\Delta\lambda_k=\lambda_k-\lambda_{k+1}$. Приведем следующий результат:

$$J_n=\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|\,dt\leqslant c\sum_{k=0}^{n}|\Delta\lambda_k|+c\left(n^{p-1}\sum_{k=0}^{n}|\Delta\lambda_k|^p\right)^{1/p},\quad 1<p\leqslant 2. \qquad (1)$$

При $p=2$ неравенство (1) было доказано Г. А. Фоминым [1], а при $1<p<2$ доказательство было дано С. Б. Стечкиным в 1965 г. па конференции в г. Тарту и позже было приведено в работах Г. А. Фомина.

Наша цель состоит в получении лучшей оценки сверху для J_n.

Имеют место следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *такова, что* $\varphi(0)=0$, $\varphi'(x)$ — *монотонно убывает к нулю при* $x\to\infty$; *тогда*

$$\left|\int_0^T\cos ax\,d\varphi(x)\right|\leqslant\varphi\left(\frac{3\pi}{2a}\right)$$

для всякого $a>0$ *и любого* $T\geqslant\pi/(2a)$.

Замечание 1. Условию леммы удовлетворяет, например, функция $\varphi(x)=x^\alpha$, $0<\alpha<1$.

Замечание 2. Из условия леммы 1 вытекает, что $\varphi'(x)>0$.

Лемма 2. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1; *тогда имеет место оценка*

$$M_n\equiv\int_0^\pi\left|\sum_{k=0}^{n}a_k\begin{Bmatrix}\cos(k+\delta)x\\ \sin(k+\delta)x\end{Bmatrix}\right|^2d\varphi(x)\leqslant c\sum_{k=0}^{n}a_k^2\left[1+\sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{n}\varphi\left(\frac{c}{|k-l|}\right)\right],$$

где a_k — *действительные числа*, $\delta\geqslant 0$.

Доказательство. Возводя в квадрат сумму, стоящую под знаком интеграла, имеем

$$M_n=\int_0^\pi\left[\sum_{k=0}^{n}a_k^2\begin{Bmatrix}\cos^2(k+\delta)x\\ \sin^2(k+\delta)x\end{Bmatrix}+\right.$$

$$+2\sum_{k\neq l}\sum a_k a_l \left\{\begin{matrix}\cos(k+\delta)x\cos(l+\delta)x\\ \sin(k+\delta)x\sin(l+\delta)x\end{matrix}\right\}\Bigg] d\varphi(x)\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{k=0}^{n} a_k^2+\sum_{k\neq l}\sum (a_k^2+a_l^2)\left|\int_0 [\cos(k-l)x\pm\cos(k+l+2\delta)x]\,d\varphi(x)\right|.$$

В силу симметричности относительно k и l выражения, стоящего под знаком двойной суммы, получаем

$$M_n\leqslant c\sum_{k=0}^{n} a_k^2+c\sum_{k\neq l}\sum a_k^2\left(\left|\int_0^{\pi}\cos(k-l)x\,d\varphi(x)\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\int_0^{\pi}\cos(k+l+2\delta)x\,d\varphi(x)\right|\right).$$

Применяя лемму 1 и учитывая, что функция $\varphi(x)$ возрастающая, будем иметь

$$M_n\leqslant c\sum_{k=0}^{n} a_k^2\left[1+\sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{n}\varphi\left(\frac{3\pi}{2|k-l|}\right)\right],$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию леммы* 1; *тогда имеет место оценка*

$$J_n\leqslant c\sum_{k=0}^{N}|\Delta\lambda_{n_k}|+c\left\{\varkappa(n,\varphi)\sum_{k=0}^{N}|\Delta\lambda_{n_k}|^2\left[1+\sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{N}\varphi\left(\frac{c}{|n_k-n_l|}\right)\right]\right\}^{1/2}, \quad (2)$$

$$n_k=\psi(k)\geqslant k,\quad N=\psi^{-1}(n),\quad \varkappa(n,\varphi)=\int_{1/n}^{\pi}\frac{dx}{x^2\varphi'(x)}.$$

Доказательство. В силу четности ядра $K_n(t)$ и после применения преобразования Абеля получаем

$$J_n=c\int_0^{\pi}|K_n(t)|\,dt=c\int_0^{1/n}|K_n(t)|\,dt+c\int_{1/n}^{\pi}|K_n(t)|\,dt=$$

$$=c\int_0^{1/n}\left|\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k D_k(t)\right|dt+c\int_{1/n}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k D_k(t)\right|dt,$$

где $D_k(t)$ — ядро Дирихле.

Используя неравенства $|D_k(t)|\leqslant k+1$, $\sin{}^1/_2x\geqslant x/\pi$, $0<x<\pi$, получаем

$$J_n\leqslant c\int_0^{1/n}\sum_{k=0}^{n}|\Delta\lambda_k|\cdot k\,dt+c\int_{1/n}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k\sin(k+{}^1/_2)t\right|\frac{dt}{t}\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{k=0}^{n}|\Delta\lambda_k|+c\int_{1/n}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k\sin(k+{}^1/_2)t\right|\frac{dt}{t}.$$

Будем считать, что последовательность $\{\Delta\lambda_k\}$ лакунарна и пусть $n_k=\psi(k)\geqslant k$, $N=\psi^{-1}(n)$.

Умножив и разделив подынтегральную функцию на $(\varphi'(t))^{1/2}$, где $\varphi(t)$ удовлетворяет условию леммы 1, после применения неравенства Буняковского получаем

$$J_n\leqslant c\sum_{k=0}^{N}|\Delta\lambda_{n_k}|+c\left\{\int\limits_{1/n}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{N}\Delta\lambda_{n_k}\sin(n_k+{}^1/_2)t\right|^2 d\varphi(t)\int\limits_{1/n}^{\pi}\frac{dt}{t^2\varphi'(t)}\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{k=0}^{N}|\Delta\lambda_{n_k}|+c\left\{\varkappa(n,\varphi)\int\limits_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{N}\Delta\lambda_{n_k}\sin(n_k+{}^1/_2)t\right|^2 d\varphi(t)\right\}^{1/2}.$$

Применяя лемму 2 ($\delta={}^1/_2$, $a_{n_k}=\Delta\lambda_{n_k}$), окончательно получим

$$J_n\leqslant c\sum_{k=0}^{N}|\Delta\lambda_{n_k}|+c\left\{\varkappa(n,\varphi)\sum_{k=0}^{N}|\Delta\lambda_{n_k}|^2\left[1+\sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{N}\varphi\left(\frac{c}{|n_k-n_l|}\right)\right]\right\}^{1/2}$$

и теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Обобщение теоремы 1 на многомерный случай получено В. Я. Бугровым.

З а м е ч а н и е 2. Если правая часть в неравенстве (2) ограничена одним числом для всех n, то мы получаем условие равномерной ограниченности ядра $K_n(t)$ в метрике L.

Т е о р е м а 2. *Если* $\sum\limits^{N}|\Delta\lambda_{n_k}|\leqslant c$,

$$n^\alpha\sum_{k=0}^{N}|\Delta\lambda_{n_k}|^2\left(1+\sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{N}\frac{1}{|n_k-n_l|^\alpha}\right)\leqslant c,\quad 0<\alpha<1,$$

то $J_n\leqslant c$ *для всех* n.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из теоремы 1 при $\varphi(x)=x^\alpha$, $0<\alpha<1$.

П р и м е р. Методы

$$\tau_{N^\gamma}(f,x)=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}S_{k^\gamma}(f,x)$$

регулярны для всех натуральных $\gamma\geqslant1$; здесь $S_k(f,x)$ — частная сумма рядов Фурье функции $f(x)$.

При $\gamma=1$ мы имеем метод Фейера, который, как известно, регулярен. Для данного метода $n=N^\gamma$, $N=n^{1/\gamma}$; $\Delta\lambda_{k^\gamma}=1/(N+1)$, $k=0,1,\ldots,N$, $\Delta\lambda_i=0$ при $i=k^\gamma+1,\ldots,(k+1)^\gamma-1$.

Выбирая $\alpha<1/\gamma\leqslant1$, можно подсчитать, что

$$n^\alpha\sum_{k=0}^{N}|\Delta\lambda_{n_k}|^2\left(1+\sum_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{N}\frac{1}{|n_k-n_l|^\alpha}\right)\leqslant c,\quad n_k=k^\gamma,\quad \sum_{k=0}^{N}|\Delta\lambda_{n_k}|=1.$$

Тогда по теореме $J_n\leqslant c$ и, следовательно, методы $\tau_{N^\gamma}(f,x)$ регулярны при всех $\gamma\geqslant1$.

З а м е ч а н и е. При $\gamma>1$ теорема Стечкина — Фомина не дает ответа на вопрос о регулярности методов $\tau_{N^\gamma}(f,x)$, так как

$$n^{p-1}\sum_{k=0}^{N}|\Delta\lambda_{n_k}|^p=N^{\gamma(p-1)}(N+1)^{1-p}\geqslant cN^{(\gamma-1)(p-1)}\to\infty\quad\text{при } N\to\infty$$

Это говорит о том, что наша оценка (2) лучше, чем оценка (1).

Московский институт электронной техники

Поступило 28 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. А. Фомин*, Матем. сборн., т. 65 (107), № 1, 144 (1964).