Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 3

УДК 517. 433 **МАТЕМАТИКА**

В. П. ГАЧОК

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И КВАНТОВЫЕ ПОЛЯ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 19 XII 1973)

Теорема о конструкции квантовых полей, удовлетворяющих системе аксиом Уайтмана, по заданным марковским полям установлена Нельсоном [1-3]. Нельсон [2] предложил систему аксиом для марковских эвклидовых полей, среди которых наиболее трудной для проверки и ограничительной является аксиома марковости.

В этой работе устанавливается теорема реконструкции гейзенберговой динамики квантовых полей на случай нейтральной скалярной квантовой теории поля, задаваемой полным набором эвклидовых функций Грина

$$G\equiv\{G_n(x_1,\ldots,x_n)\}_{n=0}^{\infty},$$

удовлетворяющих общим постулатам, таким, как:

$E0$. Функции $G_n(x_1,\ldots,x_n)\in S'(R^{dn})$, $n=0,1,2,\ldots$, и аналитичны относительно переменных $x_1,\ldots,x_n\in R^d$ и возможными сингулярными точками являются те векторы $(x_1,\ldots,x_n)$, для которых $x_i=x_j$ хотя бы для некоторых индексов $i,j=1,2,\ldots,n$, причем $i\neq j$; одновременно с этим функции $G_n((x_1^{(0)},\mathbf{x}_1),\ldots,(x_n^{(0)},\mathbf{x}_n))\in S'(R^{(d-1)n})$ для всех $x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\in R$, где $(x^{(0)},\ \mathbf{x})\equiv x\in R^d$, $d\geqslant 1$, $S(R^d)$ — пространство основных функций Л. Шварца и $S'(R^d)$ — его сопряженное.

EI. Условие (эвклидовой) (a,R)-инвариантности [4].

EII. T-инвариантность. Имеет место равенство

$$G_n((-x_1^{(0)},\mathbf{x}_1),\ldots,(-x_n^{(0)},\mathbf{x}_n))=G_n(x_1,\ldots,x_n)$$

в слабом смысле $S'(R^d)$.

EIII. Симметричность. Для всех перестановок π индексов $1,2,\ldots,n$ справедливо равенство

$$G(f_n)=G(f_{n,\pi}),$$

где

$$f_{n,\pi}(x_1,\ldots,x_n)=f_n(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(m)})\in S(R^{dn}).$$

EIV. Положительная определенность. Имеют место неравенства

$$\sum_{m,n}G(f_m^*\cdot f_n)\geqslant 0$$

для всех финитных векторов $f\in\bigoplus_n S(R^{dn})$.

EV. Свойство разложения на пучки [4].

EVI. Квазианалитичность функционала G. Имеют место оценки

$$|G(f_n)|\leqslant C_{fn}{}^n m_n,$$

где последовательность чисел $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет квазианалитический рост [5-7], C_{fn} — положительная константа, зависящая от f_n. Функционал G, обладающий свойствами $E\,0$ — V, будем называть эвклидовым функционалом, а его компоненты $G_n(x_1,\ldots,x_n)$ — эвклидовыми функциями Грина. Эвклидов функционал G, обладающий свойством VI, называется квазианалитическим.

Сравнивая предложенную систему аксиом $E0$—VI с аксиомами Остервальдера—Шредера ([4]), находим, что аксиомы $E0$, II, IV, VI являются новыми и содержат больше информации, характеризующей функционал G, как набор эвклидовых функций Грина квантовой теорией поля. Как увидим дальше, в нашей схеме постулаты $E0$, II, IV по существу заменяют постулаты ($E0$), ($E2$) Оствальдера — Шредера ([4]) и, кроме того, постулат ($E2$) следует из наших аксиом. Наше уточнение постулата ($E0$) в форме $E0$ окажется весьма полезным при построении физического пространства состояний при времени $t=0$, а также дает возможность ввести алгебру полевых операторов в отличие от ([4]). Условие VI также присутствует по существу в ([4, 8]). В этой работе мы продолжаем развивать наши результаты, касающиеся интегральных представлений по инвариантной мере ([5–7]). Здесь удалось построить марковскую меру, инвариантную относительно группы эвклидовых преобразований $(a, \mathscr{R})$.

Согласно конструкции Гельфанда — Сигала, функционалу G отвечают: гильбертово пространство H_G, унитарное представление эвклидовой группы $U(a, \mathscr{R})$ в H_G, полевой оператор $\varphi(f)$, $f(x)\in S(R^d)$ и циклический вектор $\Psi_0=\{1, 0, 0, \dots\}$.

Пусть $\mathscr{B}$ — наименьшая σ-алгебра борелевских множеств, образованных действительными функциями из $S'(R^d)$, что будем обозначать $B_n\subset\mathscr{B}$ и $B_n\in\operatorname{Re} S'(R^d)$.

Теорема 1. *Пусть G — эвклидов квазианалитический функционал.*

Тогда существует единственная вероятностная мера ρ на $\mathscr{B}$ такая, что:

1) *гильбертово пространство H_G изоморфно гильбертову пространству $L_2(S'(R^d), d\rho)$ и при этом элементу Ψ_0 отвечает элемент 1 и мера ρ $(a, \mathscr{R})$-инвариантна;*

2) *имеют место интегральные представления*

$$G_n(f_{(1)}, \dots, f_{(n)}) = \int \lambda_{f_{(1)}} \dots \lambda_{f_{(n)}}\, d\rho(\lambda_{f_{(1)}}, \dots, \lambda_{f_{(n)}})$$

для любых $f_{(1)}, \dots, f_{(n)}\in\operatorname{Re} S(R^d)$;

3) *существует представление случайного поля $\Lambda(x)$ в вероятностном пространстве $(S'(R^d), \mathscr{B}, \rho)$ и унитарное представление эвклидовой группы $\tilde{U}(a, R)$ в $L_2(S'(R^d), d\rho)$ такие, что выполнено соотношение*

$$\tilde{U}(a, \mathscr{R})\Lambda(f) = \Lambda(f_{(a, R)}),$$

где

$$\Lambda(f) = \int \Lambda(x) f(x)\, dx, \qquad f\in\operatorname{Re} S(R^d).$$

Доказательство теоремы основывается на постулатах $E0$, I, III, IV, VI. Согласно $E0$, среди элементов пространства H_G существуют такие, что

$$G(f) = \int \dots \int G_n((t_1, \mathbf{x}_1), \dots, (t_n, \mathbf{x}_n)) f_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\, d\mathbf{x}_1, \dots, d\mathbf{x}_n$$

имеет смысл, где $f_n\in S(R^{(d-1)n})$. Эти элементы обладают представлением

$$f_{t_1, \dots, t_n} = \{0, \dots, 0, f_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\otimes\delta_{t_1}\otimes \dots \otimes\delta_{t_n}, 0, 0, \dots\}$$

для конечных $t_1, \dots, t_n\in R$.

Если каждая из переменных $t_1, \dots, t_n$ пробегает плотное множество в R, то векторы $f_{t_1, \dots, t_n}$ и все их линейные комбинации при n конечных образуют плотное множество в H_G.

Введем гильбертово пространство $F_G{}^0$ как пополнение множества финитных векторов вида

$$f_{\otimes\delta_0} = \{\dots, f_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\otimes\delta_0\overbrace{\otimes \dots \otimes}^{n}\delta_0, \dots\}$$

относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_G$. Пространство $F_G{}^0$ изометрично гильбертову пространству F_G, полученному пополнением множества финитных векторов Σ: $\{f_n(x_1, \ldots, x_n)\}$ относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathrm{G}}$, где $\mathrm{G} \equiv \{G_n((0, \mathbf{x}_1), \ldots, (0, \mathbf{x}_n))\}_{n=0}^{\infty}$.

Оператор

$$J_0\colon\ \mathbf{f} \to f_{\otimes\delta_0}, \quad \mathbf{f} \in \Sigma,$$

осуществляет изометрическое вложение $F_G{}^0$ в H_G, а оператор $P_F = J_0 J_0{}^*$ — проектор из H_G на $F_G{}^0$. Если оператор

$$J_t\colon\ \mathbf{f} \to f_{\otimes\delta_t}, \quad \mathbf{f} \in \Sigma,$$

и $U(t) = J_0{}^* J_t$, то

$$J_0 U(\bar{t}) J_0{}^* = P_F U(\bar{t}) P_F, \quad \bar{t} \equiv (t, 0).$$

Лемма 1. *Семейство операторов $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ является однопараметрической полугруппой операторов на области финитных векторов $\mathfrak{D}_0 \subset \Sigma$, причем операторы $U(t)$ положительны, симметричны и имеют норму меньше единицы.*

Следовательно, в F_G существует единственное положительное самосопряженное расширение оператора $U(t)$, для которого мы сохраняем обозначение $U(t)$. Мы имеем, таким образом, слабо непрерывную однопараметрическую полугруппу сжатий $\{\exp[-t\mathscr{H}]\}_{t\geq 0}$ на F_G, где $\mathscr{H}$ — положительный самосопряженный оператор (гамильтониан).

Лемма 2. *Полугруппа $\{\exp[-t\mathscr{H}]\}_{t\geq 0}$ сохраняет положительность в $L_2(\mathrm{Re}\, S'(R^{d-1}), d\rho_0)$, где ρ_0 отвечает алгебре коммутирующих самосопряженных операторов $\{\varphi(f), f \in \mathrm{Re}\, S(R^{d-1})\}$ в соответствии с теоремой 1.*

В произвольный момент $t=0$ будем иметь семейство самосопряженных операторов

$$\{U(t)\varphi(f)U(-t)\}_{t\geq 0} = \{\varphi(f^{\otimes}\delta_t)\}_{t\geq 0}, \quad f \in \mathrm{Re}\, S(R^{d-1}),$$

в F_G и меру ρ_t и соответственно в $L_2(S'(R^{d-1}), d\rho_t)$ совокупность случайных величин

$$B^t \equiv \{\Lambda(f, t) = \tilde{U}(t)\Lambda(f), \quad f \in \mathrm{Re}\, S(R^{d-1})\}.$$

Итак, мы имеем фазовое пространство $(B, \mathscr{B}) = (\underset{t\in[0,\infty)}{\times} B^t, \mathscr{B})$ и полугруппу операторов $U(t)$, сохраняющих положительность, и таких, что $\tilde{U}(t)1 = 1$, $1 \in L_2(S'(R^{d-1}), d\rho_t)$.

Согласно теории марковских процессов ([9], [10]), справедлива

Теорема 2. *Каждому эвклидову квазианалитическому функционалу G отвечает единое эвклидово поле $\Lambda(f)$, $f \in S(R^d)$, определенное марковской вероятностной мерой ρ.*

Наличие гамильтониана $\mathscr{H}$ в гильбертовом пространстве F_G, рассматриваемом как пространство состояний системы в момент $t=0$, дает унитарное представление группы сдвигов на прямой $T(a^{(0)}) = \exp[-ia^{(0)}\mathscr{H}]$, $-\infty < a^{(0)} < \infty$. Операторы $T(a^{(0)})$, как и операторы $\varphi(f) \equiv \varphi(f, 0)$, $f \in S(R^{d-1})$, оставляют инвариантной область финитных векторов из Σ. Оператор

$$A(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix^{(0)}\mathscr{H}} \varphi_0(f_{x^{(0)}}) e^{-ix^{(0)}\mathscr{H}}\, dx^{(0)}, \quad f \in S(M^d),$$

где M^d означает R^d с метрикой Минковского, обладает всеми свойствами полевого оператора в системе аксиом Уайтмана ([11]).

Теорема 3. *Каждому эвклидову функционалу G отвечает единственный функционал Уайтмана W* ([11]) *или, эквивалентно* ([11]), *единственная* *квантовая теория поля* $(H, A(f), U(a, \Lambda), \Psi_0)$, *где* H — *гильбертово пространство состояний.* $A(f)$, $f \in S(M^d)$,— *полевой оператор,* $U(a, \Lambda)$ — *унитарное представление неоднородной собственной ортохронной группы Лоренца* (a, Λ), *причем спектр инфинитезимальных операторов трансляций содержится в верхнем времениподобном конусе,* Ψ_0 — *вакуумный циклический вектор.*

Институт теоретической физики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
22 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Nelson*, Proc. Am. Math. Soc., Summer Conference, 1972. [2] *E. Nelson,* J. Func. An., v. 12, 97 (1972). [3] *E. Nelson,* ibid., v. 11, 211 (1972). [4] *K. Osterwalder, R. Schrader*, Commun. Math. Phys., v. 31, 83 (1973). [5] *V. P. Gachok*, Preprint — 67—50, Kiev, 1967. [6] *В. П. Гачок*, Проблема моментов в квантовой теории поля, Докторская диссертация, Киев. 1968. [7] *V. P. Gachok*, V Winter School, Karpacz, 1968. [8] *V. Glazer*, On the Equivalence of the Euclidean and Wightman Formulation Field Theory, CERN Preprint, Geneva, 1973. [9] *B. Simon*, Helv. phys. acta, v. 46, 686 (1974). [10] *Ж. Невье*, Математические основы теории вероятностей, М., 1969. [11] *R. F. Streater, A. S. Wightman*, PCT, Spin and Statistics and all that, N. Y., 1964.