Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 3

УДК 517.54 МАТЕМАТИКА

Е. М. ДЫНЬКИН, С. В. ХРУЩЕВ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ГРАНИЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ГЛАДКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 21 I 1974)

Пусть X — некоторый класс непрерывных функций на единичной окружности $\Gamma=\{z: |z|=1\}$. Замкнутое множество E, $E\subset\Gamma$, называется X-интерполяционным, если для любой функции $f\in X$ найдется функция g из X, которая совпадает с f на E и при этом является граничным значением функции, аналитической в единичном круге $\Delta=\{z: |z|<1\}$ и непрерывной в $\bar\Delta=\{z: |z|\leqslant 1\}$ *.

Задача об описании интерполяционных множеств для класса C всех непрерывных функций решается теоремой Рудина — Карлесона ([1]): необходимо и достаточно, чтобы E имело лебегову меру 0. Для класса C^∞ бесконечно дифференцируемых функций эта задача решена в работе ([2]). Необходимое и достаточное условие оказалось таким:

$$\int\limits_\omega \ln\frac{1}{\rho(e^{it},E)}\,dt\leqslant \mathrm{const}\,|\omega|\ln\frac{3\pi}{|\omega|}$$

для любого интервала $\omega\subset[-\pi,\pi]$, где $|\omega|$ — длина интервала ω.

В настоящей работе описываются интерполяционные множества для классов Карлемана. При этом применяются оценки снизу для гладких функций, обращающихся в 0 на E, которые, вероятно, представляют самостоятельный интерес.

Обозначения и определения.

1) Класс Карлемана $C\{M_n\}$ образован всеми бесконечно дифференцируемыми функциями f на единичной окружности Γ, у которых

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant CQ^nM_n,\qquad |z|=1,\quad n=0,1,\ldots,$$

где постоянные C и Q могут зависеть от f.

Фиксируя Q, мы получим банахово пространство $C_Q\{M_n\}$ с нормой

$$\|f\|_Q=\sup_n\sup_z|f^{(n)}(z)|\cdot Q^{-n}M_n^{-1}.$$

Через $A\{M_n\}$ и $A_Q\{M_n\}$ мы обозначаем подклассы классов C и C_Q соответственно, образованные граничными значениями аналитических в Δ функций, непрерывных в $\bar\Delta$.

2) В этой работе будут рассматриваться только такие классы Карлемана ([4]), у которых $\sup\limits_n(M_{n+1}/M_n)^{1/n}<+\infty$ и последовательность $\{M_n/n!\}$ логарифмически выпукла. Такие классы однозначно определяются своим ассоциированным весом h,

$$h(r)=\inf_n M_nr^{n-1}/n!,\qquad r>0,$$

по формуле

$$M_n=n!\sup_r h(r)/r^{n-1}.$$

* В этом определении мы предполагаем, что множество E совершенно, так что $f^{(n)}(z)=g^{(n)}(z)$, $z\in E$, если $X\subset C^\infty$.

Логарифм ассоциированного веса

$$\varphi(r)=\ln\frac{1}{h(r)},\quad r>0,$$

называется характеристикой класса; это выпуклая убывающая функция.

Здесь мы наложим на функцию φ два дополнительных ограничения *:

а) $0<C_1<\varphi(2x)/\varphi(x)<C_2<+\infty,\quad x>0$;

б) $\int\limits_0^x\varphi(t)\,dt+x\int\limits_x^\infty\varphi(t)\cdot t^{-1}\,dt\leqslant Cx\varphi(x),\quad x>0.$

Заметим, что класс Жеврея $C\{(n!)^{1+\alpha}\}$, $\alpha>1$, и класс $C\{(n!)^{1+\alpha}(\ln n)^{\beta n}\}$, $\alpha>1$, удовлетворяют всем перечисленным условиям, причем $\varphi(r)=r^{-1/\alpha}$ в первом случае и $\varphi(r)=r^{-1/\alpha}(\ln(1/r))^{-\alpha\beta}$ во втором.

3) Всюду ниже $\Gamma=\{z\colon |z|=1\}$, $\Delta=\{z\colon |z|<1\}$, $\zeta=\xi+i\eta$, $\rho(z,E)=\inf\limits_{\zeta\in E}|\zeta-z|$ и φ удовлетворяет условиям а), б).

Основной результат. Замкнутое множество E, $E\subset\Gamma$, называется $C\{M_n\}$-интерполяционным, если для любой функции f из $C\{M_n\}$ найдется функция g из $A\{M_n\}$ такая, что $f^{(n)}(z)=g^{(n)}(z)$ при $z\in E$ и всех n.

Теорема 1. *Пусть $E\subset\Gamma$, $C\{M_n\}$ — класс Карлемана с характеристикой φ. Для того чтобы множество E было $C\{M_n\}$-интерполяционным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_\omega\varphi[\rho(e^{it},E)]\,dt\leqslant\mathrm{const}\,|\omega|\varphi(|\omega|)\tag{*}$$

для любого интервала ω, $\omega\subset[-\pi,\pi]$.

Этапы доказательства. На первом этапе интерполяционная задача связывается с таким условием на множество E.

Условие $L(B)$, $B>0$. Существуют положительные постоянные Q, C_1, C_2 и семейство функций $\{W_\zeta\}$, $|\zeta|<1$, такие, что

а) при любом ζ, $|\zeta|<1$,

$$W_\zeta\in A_Q\{M_n\},\quad \|W_\zeta\|_Q<C_1;$$

б) $W_\zeta^{(n)}(z)=0,\quad z\in E,\quad n=0,1,2,\ldots;$

в) $|W_\zeta(\zeta)|\geqslant C_2h[B\rho(\zeta,\Gamma)]$.

Теорема 2. *Если множество E $C\{M_n\}$-интерполяционное, то условие $L(B)$ выполняется для некоторого числа $B>0$.*

Обратно, если условие $L(B)$ выполнено при всех B, то множество E $C\{M_n\}$-интерполяционное.

Теорема 2 сводит интерполяционную задачу к проверке условия $L(B)$. Заметим, что формула Тейлора дает оценку

$$|W_\zeta(z)|\leqslant\mathrm{const}\,h[Q\rho(z,E)]$$

и поэтому неравенство в) из условия $L(B)$ является точным.

Теорема 3. *Если условие $L(B)$ выполняется при некотором B, то множество E удовлетворяет условию (*). Обратно, если условие (*) выполнено, то при любом $B>0$ существует функция W, $W\in A\{M_n\}$, такая, что*

а) *$W^{(n)}(z)=0$ при $z\in E$ и всех n;*

б) $|W(z)|\geqslant\mathrm{const}\,h[B\rho(z,E)]$, $|z|\leqslant1$.

В частности, выполняется $L(B)$ при всех B.

Ясно, что теорема 1 получается простым соединением теорем 2 и 3.

Скажем несколько слов о доказательствах теорем 2 и 3. В теореме 2, рассматривая на пространствах $C\{M_n\}$ и $A\{M_n\}$ топологии индуктивных

---

* Очевидно, что суммируемость φ необходима для существования нетривиальных интерполяционных множеств.

пределов банаховых пространств C_Q и A_Q, можно показать, что интерполяционное множество обязательно обладает более сильным свойством «равномерной интерполяции»:

Всякая функция f из $C_1\{M_n\}$ совпадает на E с некоторой функцией g из $A_Q\{M_n\}$ с фиксированным Q, причем

$$\|g\|_Q \leqslant \text{const}\, \|f\|_1.$$

Применяя это неравенство к функции

$$f(z) = 1/(\zeta - z), \quad |\zeta| < 1,$$

мы получим нужное нам семейство $\{W_\zeta\}$:

$$W_\zeta(z) = h[B(1-|\zeta|)][1-(\zeta-z)g(z)], \quad |z| \leqslant 1,$$

где B достаточно мало.

Обратно, если $L(B)$ выполнено при всех B, рассмотрим любую функцию f из $C\{M_n\}$. В ([3]) показано, что она допускает представление

$$f(z) = \iint\limits_{|\zeta|<2} \alpha(\zeta)(\zeta-z)^{-1}\, d\xi\, d\eta, \quad |z| = 1,$$

где

$$|\alpha(\zeta)| \leqslant \text{const}\, h[B\rho(\zeta, \Gamma)], \quad B > 0.$$

Тогда аналитическая функция, совпадающая с f на E, как можно проверить, дается формулой

$$g(z) \iint\limits_{1<|\zeta|<2} \frac{\alpha(\zeta)}{\zeta-z}\, d\xi\, d\eta + \iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{\alpha(\zeta)}{W_\zeta(\zeta)} \frac{W_\zeta(\zeta) - W_\zeta(z)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta.$$

Что касается теоремы 3, то первое ее утверждение доказывается применением неравенства Иенсена к функциям W_ζ и контуру кругового прямоугольника с центром ζ, сторона которого пропорциональна $1-|\zeta|$.

Наконец, функция W, существование которой утверждается в теореме, строится следующим образом. Положим

$$\Omega_E = \left\{ z:\ |z| > 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(z, E) \leqslant |z| - 1 \right\}.$$

Тогда функция

$$W(z) = \exp\left\{ -B \iint\limits_{\Omega_E} \frac{\varphi[\rho(\zeta, E)]}{\rho(\zeta, E)} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \right\}, \quad |z| \leqslant 1,$$

является искомой. Сходимость и остальные свойства последнего интеграла вытекают из условия (*).

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить В. П. Хавина и Б. М. Макарова за внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
24 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *К. Гофман*, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, 1963. [2] *H. Alexander, B. A. Taylor, D. L. Williams*, J. Math. Anal. Appl., v. 36, 556 (1971). [3] *Е. М. Дынькин*, ДАН, т. 208, № 1 (1973). [4] *С. Мандельбройт*, Квазианалитические классы функций, 1937.