Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 3

УДК 523.035.2

АСТРОНОМИЯ

Н. Б. ЕНГИБАРЯН, М. А. МНАЦАКАНЯН

О ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ПЕРЕНОСА

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 11 I 1974)

В данной работе предлагается общий подход к линейным стационарным задачам переноса в плоскопараллельном слое. Описываются структура уравнений переноса по глубине z и некоторые методы их решения. В целях сохранения общности предлагаемой схемы изложение ведется на «физическом» уровне строгости. Результаты легко обосновываются при рассмотрении конкретных задач.

1. Пусть $\Pi(a, r)$, $r>a$, — плоскопараллельный слой с границами $z=a$ и $z=r$. Поле излучения в среде описывается интенсивностями $I^\pm(z)$ (в сторону возрастания и убывания z соответственно), представляющими собой распределение излучения по направлениям, частотам, степени поляризации и т. д. $I^\pm(z)$ принимают значения из воспроизводящего конуса K (неотрицательных функций) в соответствующем банаховом пространстве B.

Каждому подслою $\Pi(z, z')$, $(z, z')\subset(a, r)$, соответствуют операторы отражения $R^\pm(z, z')$ и пропускания $Q^\pm(z, z')$, принимающие значения из банаховой алгебры $\mathfrak{B}$ линейных ограниченных операторов, действующих в B. Знаки $\pm$ соответствуют освещенности слева и справа. Операторы $R^\pm$ и $Q^\pm$ оставляют инвариантным конус K. Этот конус вводит полуупорядоченность $\succ$ как в B, так и в $\mathfrak{B}$.

Предполагается, что $\|Q^\pm(z, z')+R^\pm(z, z')\|\leqslant 1$ (отсутствие генерации) и $Q^\pm(z, z')\to I$, $R^\pm(z, z')\to 0$ при $z'\to z+0$. Предполагается также существование пределов

$$T^\pm\equiv \lim_{z'\to z+0}\frac{I-Q^\pm(z,z')}{z'-z},\quad Z^\pm\equiv \lim_{z'\to z+0}\frac{R^\mp(z,z')}{z'-z},\tag{1}$$

причем $T^\pm$ и $Z^\pm$ — вообще говоря, неограниченные операторы.

Для однородной среды $T^\pm$ и $Z^\pm$ не зависят от z. Для локально изотропной среды $T^+=T^-$ и $Z^+=Z^-$.

2. Пусть на среду $\Pi(a, r)$ слева падает поток I_0^+. Требуется найти $I^\pm(z)$. Рассмотрение режимов на границах подслоя $\Pi(z, z')$ приводит к соотношениям

$$I^+(z')=Q^+(z, z')I^+(z)+R^-(z, z')I^-(z'),\tag{2}$$

$$I^-(z)=Q^-(z, z')I^-(z')+R^+(z, z')I^+(z).\tag{3}$$

Отсюда с учетом (1) получаем следующую краевую задачу:

$$\pm dI^\pm/dz=-A^\pm I^\pm+Z^\pm(I^++I^-),\tag{4}$$

$$I^+(a)=I_0^+,\quad I^-(r)=0,\tag{5}$$

где $A^\pm(z)\equiv T^\pm(z)+Z^\pm(z)$.

Ниже мы рассмотрим задачу (4), (5), считая $A^\pm$ и $Z^\pm$ известными (так обстоит дело в конкретных задачах переноса). В частности, укажем способы нахождения операторов $R^\pm$ и $Q^\pm$.

3. Из (3) при $z'=r$ имеем

$$I^-(z)=R(z)I^+(z),\quad R(z)\equiv R^+(z, r).\tag{6}$$

Подстановка (6) в (4) приводит к следующей задаче Коши для операторного уравнения Риккати относительно $R(z)$ ([1-3], [7]):

$$-dR/dz+(A^-R+RA^+)=(Z^-+RZ^+)(I+R), \quad R(r)=0. \tag{7}$$

Знание $R(z)$ позволяет одновременно решить семейство задач с различными значениями a. $I^+(z)$ определяется из задачи Коши

$$dI^+/dz=(Z^+R-T^+)I^+, \quad I^+(a)=I_0^+. \tag{8}$$

а $I^-(z)$ — из (6).

В случае однородной полубесконечной среды $(r=\infty)$ оператор R не зависит от z и определяется из уравнения

$$A^-R+RA^+=(Z^-+RZ^+)(I+R). \tag{9}$$

Последовательные приближения для решения (7) и (9) сходятся монотонно по n ($R_{n+1}>R_n$, если $R_0=0$). В однородной среде зависимость $R(z)$ от z монотонная.

4. В частных случаях уравнения (7) и (9) обращаются в известные уравнения, полученные ранее применением принципа инвариантности Амбарцумяна ([3-6], [8]).

Пусть $Z^\pm$ — интегральные операторы,

$$Z^\pm(z)f=\int L^\pm(z,\eta,\zeta)f(\zeta)\,d\zeta,$$

а $A^\pm$ — оператор умножения на функции $a^\pm(z,\eta)$. Тогда R — интегральный оператор с ядром, удовлетворяющим интегродифференциальному уравнению

$$\frac{d\omega(z,\eta,\zeta)}{dz}+[a^-(z,\eta)+a^+(z,\zeta)]\,\omega(z,\eta,\zeta)=$$

$$=L^-(z,\eta,\zeta)+\int\omega(z,\eta,\eta')L^+(z,\eta',\zeta)\,d\eta'+\int L^-(z,\eta,\eta')\,\omega(z,\eta',\zeta)\,d\eta'+$$

$$+\int\omega(z,\eta,\eta')\,d\eta'\int L^+(z,\eta',\eta'')\,\omega(z,\eta'',\zeta)\,d\eta'' \tag{10}$$

с условием $\omega(0,\eta,\zeta)=0$.

Уравнение (10) обобщает ряд результатов работ ([2], [7-9]).

5. Уравнения (7) и (9) могут быть сведены к системам дифференциальных и алгебраических уравнений. Пусть $\{\varphi_k, J_k\}$ — биортогональная система, где $\{\varphi_k\}$ и $\{J_k\}$ — базисы в B и B^* соответственно, причем $Z^\pm$ допускают разложения

$$Z^\pm=\sum\alpha_k^\pm(z)J_k, \quad \alpha_k^\pm\in B.$$

Тогда в n-м приближении (7) сводится к

$$-\frac{dR_{km}}{dz}+\sum_{p=1}^{n}[\overset{-}{a}_{kp}R_{pm}+\overset{+}{a}_{pm}R_{kp}]=\sum_{p=1}^{n}\left(\overset{-}{\alpha}_{kp}+\sum_{s=1}^{n}R_{ks}\overset{+}{\alpha}_{sp}\right)(\delta_{pm}+R_{pm}),$$

$$R_{ij}(r)=0,$$

где $R_{km}=J_k(R\varphi_m)$, $a_{kp}^{+}=J_k(A^\pm\varphi_p)$, $\alpha_{km}^{+}=J_k(\alpha_m^{+})=J_k(Z^\pm\varphi_m)$. Имеем

$$R(z)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}R_{km}(z)\,\varphi_kJ_m.$$

6. Ниже излагается новый способ решения задачи переноса в однородной среде конечной толщины. Результаты получаются путем выделения из полубесконечной среды $\Pi(0,\infty)$ слоя конечной толщины r. Для простоты рассмотрим случай изотропной среды.

Введем оператор $Y(r)$, имеющий следующий смысл: пусть плоскость $z=r$ справа освещается первичным потоком f. Тогда выходящее из $\Pi(0, \infty)$ излучение есть $I_0^- = Y(r)f$.

Из определения $Y(r)$ следует полугрупповое свойство

$$Y(r_1+r_2)=Y(r_1)\,Y(r_2),$$

поэтому $Y(r)$ удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$dY(r)/dr=-GY(r), \quad Y(0)=I, \tag{11}$$

где $-G=(dY/dr)_{r=0}$ — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы. Формальное решение (11) есть $Y(r)=e^{-Gr}$.

Операторы отражения $R(r)$ и пропускания $Q(r)$ для конечного слоя связаны с операторами R_∞ и $Y(r)$ соотношениями

$$R_\infty=R+YR_\infty Q, \tag{12}$$

$$Y=Q+YR_\infty R. \tag{13}$$

Отсюда, в частности, следуют уравнение (9) (изотропный случай) и формулы

$$G=A-(I+R_\infty)Z=(I-R_\infty)A(I+R_\infty)^{-1} \tag{14}$$

для определения оператора G.

7. Применение принципа инвариантности к однородному плоскопараллельному слою приводит к следующим уравнениям относительно $R(r)$ и $Q(r)$ (обобщение уравнений Амбарцумяна для φ- и ψ-функций ([3–5], [8])):

$$\begin{gathered} AR+RA=(I+R)Z(I+R)-QZQ, \\ A\sigma-\sigma A=(I+R)ZQ-QZ(I+R), \\ Q=\sigma+e^{-Ar}. \end{gathered} \tag{15}$$

Исключив σ, для R и Q получим новую систему, не содержащую толщину слоя r. Поэтому эта система, в отличие от (12), (13), не имеет единственного решения. Физическое решение должно быть выделено из дополнительных соображений.

8. Рассмотрим задачу переноса в однородной полубесконечной среде при чистом рассеянии при отсутствии источников в конечной части пространства (проблема Милна ([3–5], [9])).

Выходящая из полубесконечной среды интенсивность $F=I_0^-$ является собственным элементом оператора $Y(r)$:

$$Y(r)F=F,$$

что эквивалентно принадлежности F нуль-пространству оператора G:

$$GF=0. \tag{16}$$

С учетом (14) имеем

$$F=(I+R_\infty)A^{-1}f_0, \tag{17}$$

где f_0 есть собственный элемент оператора R_∞: $R_\infty f_0=f_0$ и совпадает со световым режимом в бесконечной среде при отсутствии источников в конечной части пространства.

Авторы выражают глубокую признательность акад. В. А. Амбарцумяну и акад. В. С. Владимирову за важные обсуждения результатов работы.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук АрмССР

Поступило
13 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. С. Владимиров*, ПММ, т. 19, 315 (1955). [2] *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, ДАН, т. 206, 792 (1972). [3] *В. А. Амбарцумян*, Научные тр., т. 1, Ереван, 1960. [4] *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии, М., 1956. [5] *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953. [6] *В. В. Соболев*, ДАН, т. 111, 1000 (1956). [7] *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, т. 7, 573 (1971). [8] *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, т. 8, 71 (1972). [9] *М. В. Масленников*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 97 (1968).