Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 3

УДК 517.9:513.88 *МАТЕМАТИКА*

Н. К. НИКОЛЬСКИЙ

ПРОСТРАНСТВА С ВЕСОВЫМИ НОРМАМИ: ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕЙЛОРА И СТЕПЕННЫЕ БАЗИСЫ. ГРАНИЧНЫЕ НОРМЫ И НЕРАВЕНСТВА БЕРНШТЕЙНА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 XI 1973)

В работе рассматриваются классы функций, аналитических в круге $\mathbf{D}=\{\zeta:\ |\zeta|<1\}$ комплексной плоскости, и нормированные с соблюдением небольшого числа естественных требований. Для такого класса $\mathscr{E}$ определяется весовое пространство аналитических функций $\mathscr{E}_f$, $f\in\mathscr{E}$, равенством $\mathscr{E}_f=\{g:\ fg\in\mathscr{E}\}$. Находится необходимое и достаточное условие на «вес» f для того, чтобы коэффициенты Тейлора функций из $\mathscr{E}_f$ росли (убывали) не быстрее (не медленнее), чем в $\mathscr{E}$; исследуется и в ряде случаев полностью решается проблема степенного базиса в весовом классе $\mathscr{E}_f$. Инструментом для этого служит «граничная норма», определяемая ниже, и позволяющая объединить вопросы, упомянутые в заглавии.

1. Обозначения и терминология. z — тождественное отображение круга $\mathbf{D}$ в себя, $z(\zeta)\equiv\zeta$, $\zeta\in\mathbf{D}$; $\Gamma=\{\zeta:\ |\zeta|=1\}$; T_k — функционал вычисления коэффициента Тейлора: $T_k(\sum_{n\geqslant0}\hat f(n)z^n)=\hat f(k)$, $k\geqslant0$; если g и h аналитичны в $\mathbf{D}$, то $(g^*T_k)(h)\overset{\text{def}}{=}T_k(gh)$; если $g\in\mathscr{E}_f$, то $\|g\|_f=\|gf\|_{\mathscr{E}}$; если M — конечная мера в $\mathbf{D}$, то $H^p(M)$ — класс всех аналитических функций f с $f\in L^p(M)$; если M — мера на Γ, то $H^p(M)$ — пополнение полиномов от z в норме $L^p(M)$; если $m=M$ — мера Лебега на Γ, то $H^p(M)=H^p$ — известное пространство Харди, $\|\cdot\|_{H^p}=\|\cdot\|_p$; $C_A=\{f:\ f$ аналитична в $\mathbf{D}$, непрерывна в $\overline{\mathbf{D}}\}$; $l_A{}^p(w_n)=\{f:\ f=\sum_{n\geqslant0}\hat f(n)z^n,\quad (\sum_{n\geqslant0}|\hat f(n)|^pw_n{}^p)^{1/p}<+\infty\}$; $\mathscr{L}(A)$ — замкнутая линейная оболочка множества A.

Напомним, что последовательность $\{z^n\}_{n\geqslant0}$ по определению равномерно минимальна в $\mathscr{E}$, если $d=d(\mathscr{E})\overset{\text{def}}{=}\inf_n\operatorname{dist}(z^n\|z^n\|_{\mathscr{E}}^{-1},\ \mathscr{L}(z^k:\ k\neq n))>0$. Ясно, что $1/d=\sup_{n\geqslant0}\|z^n\|_{\mathscr{E}}\cdot\|T_n\|_{\mathscr{E}^*}$ и что неравенство $d(\mathscr{E})>0$ равносильно вложению $\mathscr{E}\subset l_A{}^\infty(\|z^n\|_{\mathscr{E}})$ или системе оценок $|\hat g(n)|\leqslant\leqslant\mathrm{const}\,\|z^n\|^{-1}\cdot\|g\|_{\mathscr{E}}$, $g\in\mathscr{E}$. Например, эти оценки справедливы, если пространство $\mathscr{E}$ инвариантно относительно вращений: $f\in\mathscr{E}\Rightarrow f_\alpha\in\mathscr{E}$; $f_\alpha(\zeta)=f(\alpha\zeta)$, $|\alpha|=1$. Одна из целей статьи — научиться строить новые классы $\mathscr{E}_f$ со свойством равномерной минимальности степеней, исходя из пространств $\mathscr{E}$, уже обладающих этим свойством. Потребность в таких классах возникает, например, в задачах весовой полиноминальной аппроксимации (1).

2. Определение граничных пространств $\partial\mathscr{E}$ и $\partial^*\mathscr{E}^*$. Пусть $\mathscr{E}$ — банахово пространство аналитических в $\mathbf{D}$ функций, для которого:

а — функционалы $f\to f(\zeta)$, $\zeta\in\mathbf{D}$, непрерывны на $\mathscr{E}$;

б) $z^n\in\mathscr{E}$; $\{z^n\}_{n\geqslant0}$ — равномерно минимальная последовательность;

в) $\lim_n\|z^{n+1}\|_{\mathscr{E}}/\|z^n\|_{\mathscr{E}}=1$.

Сопоставим каждому функционалу Φ из сопряженного пространства $\mathscr{E}^*$ его преобразование Коши $K\Phi$: $(K\Phi)(t) \overset{\text{def}}{=} \Phi((1-tz)^{-1})$, $t\in\mathbf{D}$. Из в) следует, что функция $K\Phi$ аналитична в $\mathbf{D}$; по определению $\|K\Phi\|_{K\mathscr{E}^*} = \|\Phi\|_{\mathscr{E}^*}$. Положим

$$\partial\mathscr{E} = \left\{ f\colon f\in\mathscr{E}, \quad \|f\|_{\partial\mathscr{E}} \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_n \frac{\|z^n f\|_{\mathscr{E}}}{\|z^n\|_{\mathscr{E}}} < +\infty \right\},$$

$$\partial^*\mathscr{E}^* = \left\{ g\colon \|g\|_{\partial^*\mathscr{E}^*} \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_n \frac{\|g^* T_n\|_{\mathscr{E}^*}}{\|T_n\|_{\mathscr{E}^*}} < +\infty \right\}.$$

3. Равномерная минимальность и базисы.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{E}$ — пространство, удовлетворяющее условиям* а) — в), *и* $f\in\mathscr{E}$; $f(\zeta)\neq 0$, $\zeta\in\mathbf{D}$. *Следующие утверждения равносильны:*

1) $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ — *равномерно минимальная последовательность в* $\mathscr{E}_f$ (*т. е.* $\mathscr{E}_f \subset l_A^\infty(\|z^n\|_f)$);

2) $f\in\partial\mathscr{E}$, $1/f\in\partial^*\mathscr{E}^*$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{E}$ — пространство из теоремы 1. Если степени $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ образуют базис в пространстве $\mathscr{E}$ (или $\mathscr{E}_f$), то это же верно и для пространства $\partial\mathscr{E}$ ($(\partial\mathscr{E})_f$ соответственно).*

Теорема 3. *Пусть F — пространство измеримых функций на промежутке $[0, 1)$, снабженное монотонной нормой ($|\varphi|\leqslant|\psi| \Rightarrow \|\varphi\|\leqslant\|\psi\|$), и $\mathscr{E}=F\circ H^2$ — совокупность всех аналитических в $\mathbf{D}$ функций g, для которых $r\to\|g_r\|_2$, $0\leqslant r<1$, принадлежит F. Пусть $f\in F\circ H^2$, $f(\zeta)\neq 0$, $\zeta\in\mathbf{D}$. Степени $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ образуют базис в метрике пространства $\mathscr{E}_f$ в том и только в том случае, когда f, $1/f\in H^2$ и $|f|^2=\exp(u+\tilde{v})$ на $\mathbf{\Gamma}$, где u и v — ограниченные вещественные функции, $\tilde{v}$ — гармонически сопряженная к v и $\|v\|_\infty<\pi/2$.*

Замечание. Если последовательность $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ полна в $\mathscr{E}$, то слова «базис в метрике $\mathscr{E}_f$» можно заменить на «базис в $\mathscr{E}_f$».

Следствие. *Если $\partial\mathscr{E}=C_A$ или $\partial\mathscr{E}=H^1(M)$, M — мера на $\mathbf{\Gamma}$ с бесконечным носителем* $\operatorname{supp} M$, *то $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ — не базис в $\mathscr{E}_f$ при любом f, $f\in\mathscr{E}$, $f(\zeta)\neq 0$, $\zeta\in\mathbf{D}$.*

Случай $\mathscr{E}=H^1(dx\,dy)$, $f=1$ разработан Б. М. Бычковым в 1967 г.

4. Комментарии. Основными примерами пространств, для которых ниже вычисляются $\partial\mathscr{E}$ и $\partial^*\mathscr{E}^*$, будут $\mathscr{E}=H^p(dM\,dm)$, где M — мера на радиусе $[0, 1)$; $\mathscr{E}=A(\lambda)$ — совокупность всех аналитических в $\mathbf{D}$ функций g, для которых $|g(\zeta)|=o(\lambda(|\zeta|))$ при $|\zeta|\to 1$ (λ — положительная возрастающая функция на $[0, 1)$) и $\mathscr{E}=l_A^p(w_n)$. В последнем случае всегда предполагается, что $\lim\limits_n w_{n+1}/w_n=1$. Если $\mathscr{E}$ — гильбертово пространство, то теорема 1 приводит к оценкам для старших коэффициентов многочленов, ортогональных в весовой норме $\mathscr{E}_f$. Именно, если $g_n=a_{nn}z^n+\ldots$ — такие многочлены, то из равномерной минимальности следует $|a_{nn}|\leqslant\mathrm{const}/\|z^n\|_{\mathscr{E}}$, $n\geqslant 0$. Эти оценки являются новыми даже в случае $\mathscr{E}=H^2(dx\,dy)$, ср. ([2]).

Таблица 1

$\mathscr{E}$	$L^q(M)\circ H^p$	$\{f\colon \mathcal{J}^n f\in H^p\}$	$A(\lambda)$	C_A	$l_A^p(n^\alpha)$	$C_A^{(n)} = \{f\colon f^{(n)}\in C_A\}$	$H_q^p = \{f\colon f^{(q)}\in H^p\}$
$\partial\mathscr{E}$	H^p	H^p	H^∞	C_A	$\dfrac{l_A^p,\ \alpha\leqslant 0}{l_A^p(n^\alpha),\ \alpha>0}$	$C_A^{(n)}$	H_q^p
$\partial^*\mathscr{E}^*$	$H^{p'}$	$H^{p'}$	H^1	H^1	$\dfrac{l_A^{p'},\ \alpha\leqslant 0}{l_A^\infty(n^\alpha),\ \alpha>1/p'}$	$C_A^{(n)}$	$H^{p'}\cap l_A^\infty(n^q)$

Условие базисности из теоремы 3 допускает упрощения, покрывающие известные случаи ([3–5]). Примеры: а) $\mathscr{E}$ — любое, $f\in\partial\mathscr{E}$, $1/f$ — полином; г) $f=\exp\int\limits_{\overline{D}}\log(1-zt)\,dM(t)$, M — вещественная мера в $\mathbf{D}$, $\operatorname{Var} M<{}^1/_2$; $\mathscr{E}=F\circ H^2$. Константа ${}^1/_2$ точна. Примеры к теореме 1 собраны в табл. 1.

5. Вычисление $\partial\mathscr{E}$. Отметим сначала, что всегда $\|zf\|_{\partial\mathscr{E}}=\|f\|_{\partial\mathscr{E}}$, $f\in\partial\mathscr{E}$.

Всюду ниже E — пространство аналитических в $\mathbf{D}$ функций, которое удовлетворяет условиям а)—в) и в котором оператор умножения на z изометричен ($\|zf\|_E=\|f\|_E$). Если $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ — последовательность положительных чисел, то $E_\Lambda=\{f\colon \Lambda f\overset{\text{def}}{=}\sum\limits_{n\geqslant 0}\hat f(n)\lambda_n z^n\in E\}$; в частности, $(l_A{}^p)_\Lambda=$ $=l_A{}^p(\lambda_n)$.

Теорема 4. *Если* $\mathscr{E}=F\circ E$ *и* $f\in\mathscr{E}$, то $\varliminf\limits_{r\to1-0}\|f_r\|_E\leqslant\|f\|_{\partial\mathscr{E}}\cdot\|\mathbf{1}\|_F\leqslant$ $\leqslant\varlimsup\limits_{r\to1-0}\|f_r\|_E$. *В частности,* $\varlimsup\limits_{r\to1-0}\|f_r\|_E<+\infty\Rightarrow f\in\partial\mathscr{E}$, *и* $\varliminf\limits_{r\to1-0}\|f_r\|_E=+\infty\Rightarrow f\notin\partial\mathscr{E}$.

Итак, во многих случаях (например, когда $E=H^p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$) $\partial\mathscr{E}=E$.

Теорема 5. *Пусть* $\lim\limits_n\lambda_{n+1}/\lambda_n=1$, $\mathscr{E}=E_\Lambda$. *Если выполнено одно из следующих условий*: 1) $\{z^n\}_{n\geqslant0}$ — *безусловный базис в* E *и* $\sup\limits_{n,k}\lambda_{n+k}\cdot$ $\cdot\lambda_n{}^{-1}<\infty$; 2) $\{z^n\}_{n\geqslant0}$ — *базис в* E, $\sup\limits_n\lambda_n<\infty$; $\{\lambda_{n+1}/\lambda_n\}_{n\geqslant0}$ *монотонна*; 3) $\{z^n\}_{n\geqslant0}$ — *базис Чезаро в* E, $\lambda_n\downarrow0$; $\{\lambda_n\}_{n\geqslant0}$ *и* $\{\lambda_{n+1}/\lambda_n\}_{n\geqslant0}$ *выпуклы, то* $\partial E_\Lambda=E_*$ — *множество всех функций* f *из* E_Λ, *для которых ограничено в* E *семейство частичных сумм ряда Тейлора (случаи* 1), 2)) *или сумм Чезаро — Фейера (случай* 3)). *Если при соблюдении прочих условий заменить* $\lambda_n\downarrow0$ *на* $\lambda_n\uparrow$ (*а в случае* 1) *на* $\sup\limits_{n,k}\lambda_{n+k}\cdot\lambda_n{}^{-1}\lambda_k{}^{-1}<+\infty$), *то* $\partial E_\Lambda=E_\Lambda$ *и* $\|f\|_{\partial E_\Lambda}=\|f\|_E$.

6. Вычисление $\partial^*\mathscr{E}^*$. Неравенства Бернштейна.

Теорема 6. *Если* $\mathscr{E}$ — *пространство из теоремы* 1, *то* $\partial^*\mathscr{E}^*=$ $=(\mathscr{E},\|z^n\|_{\mathscr{E}})\overset{\text{def}}{=}\{f\colon g\in\mathscr{E}\Rightarrow gf\in l_A{}^\infty(\|z^n\|_{\mathscr{E}})\}\subset\partial^*K(\partial\mathscr{E})^*$.

Явное вычисление $\partial^*\mathscr{E}^*$ требует дополнительных построений. Обозначим символом $D\mathscr{E}$ множество всех функций $f=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\hat f(n)z^n$ таких, что $\hat f(n)=0$ при $n<n(f)$ и $\sum\limits_{n\geqslant0}\hat f(n)z^n\in\partial\mathscr{E}$; положим $\|f\|_{D\mathscr{E}}=\|z^nf\|_{\partial\mathscr{E}}$, где $n\geqslant n(f)$. Определим инволюцию I на множестве $\mathbf{P}$ всех полиномов от z и z^{-1} равенством $I(\sum\limits_n\hat p(n)z^n)=\sum\limits_n\hat p(-n)z^n$. Наконец, $(D\mathscr{E})_+{}^*$ — множество линейных функционалов Φ на $\mathbf{P}$, непрерывных в метрике $D\mathscr{E}$, и «аналитических в том смысле, что $\Phi(z^{-k})=0$, $k\geqslant0$.

Теорема 7. *Пусть* $\mathscr{E}$ — *пространство из теоремы* 1 *и инволюция* I *непрерывна в* $D\mathscr{E}$. *Тогда* $\partial^*\mathscr{E}^*\subset K(D\mathscr{E})_+{}^*$. *Если оператор умножения на* z *изометричен в* $\mathscr{E}$, *то* $\partial^*\mathscr{E}^*=K(D\mathscr{E})_+{}^*$. *Если же степени* $\{z^n\}_{n\geqslant0}$ *образуют базис в* $\mathscr{E}$ *и существует* $c=c(\mathscr{E})$ *такое, что*

$$\|p\|_{\partial\mathscr{E}}\cdot\|z^n\|_{\mathscr{E}}\leqslant c\|p\|_{\mathscr{E}}\qquad(*)$$

для любого полинома p *степени* $\leqslant n$, *то* $\partial^*\mathscr{E}^*=K(\partial\mathscr{E})^*$.

Замечание. Ясно, что $(D\mathscr{E})_+{}^*\subset(\partial\mathscr{E})^*$. Пример $\mathscr{E}=C_A$ показывает, что обратное включение, вообще говоря, не верно. Однако оно имеет место, если естественный проектор из $D(\mathscr{E})$ на $\partial(\mathscr{E})$ непрерывен. Неравенство (*) назовем сопряженным неравенством Бернштейна.

Примеры. 1) В условиях 1)—3) теоремы 5 имеет место сопряженное неравенство Бернштейна $\lambda_n\|g\|_E\leqslant c\|\Lambda g\|_E$, ст. $g\leqslant n$. В частности

$$\|g\|_E\frac{n!}{(n+m)!}\leqslant\|\mathcal{J}^m g\|_E\left(\mathcal{J}g(\zeta)=\int\limits_0^\zeta g\,dt\right).$$

2) Если $\mathscr{E}=F\circ E$, инволюция I непрерывна в DE и $\sup\limits_{0\leqslant r<1}\|h_r\|_{DE}<+\infty$ для любого h, $h\in DE$ $\left(h_r\overset{\mathrm{def}}{=}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\hat{h}(n)r^{|n|}z^n\right.$ — среднее Абеля), то верно (*): $\|g\|_E\cdot\|r^n\|_F\leqslant c\|g\|_{\mathscr{E}}$, ст. $g\leqslant n$. В частности, для смешанных интегральных норм ($E=H^p$, $F=L^q(M)$, M — мера на $[0,1)$):

$$\left(\int\limits_\pi|g|^p\,dm\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^1 r^{nq}\,dM(r)\right)^{1/q}\leqslant\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_\pi|g(rt)|^p\,dm(t)\right)^{q/p}dM(r)\right)^{1/q}.$$

Более общие неравенства получим при $E=H^p(\mu)$, где μ — мера, удовлетворяющая условиям Розенблюма (ограниченность средних Абеля) ([5]).

Теоремы 7, 8 позволяют находить $\partial^*\mathscr{E}^*$, минуя описание сопряженного к $\mathscr{E}$ пространства $\mathscr{E}^*$ (что, как правило, составляет значительно более сложную задачу, чем отыскание $(\partial\mathscr{E})^*$; типичный пример: $\mathscr{E}=H^p(dx\,dy)$, $\partial\mathscr{E}=H^p$). Эти теоремы охватывают случай пространств $\mathscr{E}$, состоящих из «негладких» в $\overline{\mathbf{D}}$ функций. В противоположном «гладком» случае удается мало что добавить к общему «мультипликаторному» описанию из теоремы 6.

Теорема 8. 1) *Если* $\mathscr{E}$ *обладает свойствами* а)—в) *и* $\mathscr{E}\cdot l_A^\infty(\|z^n\|_{\mathscr{E}})\subset\subset l_A^\infty(\|z^n\|_{\mathscr{E}})$, *то* $\partial^*\mathscr{E}^*=l_A^\infty(\|z^n\|_{\mathscr{E}})$. 2) *Если* $\mathscr{E}=E_A\subset l_A^1$, *инволюция* I *непрерывна в* DE *и* $\lambda_n\leqslant\mathrm{const}\cdot\lambda_n+\lambda_{n-k}$; $0\leqslant k\leqslant n$, $n\geqslant 0$, *то* $\partial^*\mathscr{E}^*=K(DE)_+{}^*\cap\cap l_A^\infty(\lambda_n)$.

Вычисление пространств $\partial^*\mathscr{E}^*$ для «гладких» в $\overline{\mathbf{D}}$ функций связано с «неравенством Бернштейна» $\|p\|_{\mathscr{E}}\leqslant c\|z^n\|_{\mathscr{E}}\cdot\|p\|_{\partial\mathscr{E}}$, ст. $p\leqslant n$, двойственным с (*). Оно выполнено, в частности, для любого пространства из второй половины теоремы 5. Случай $\lambda_n=n+1$, $n\geqslant 0$ классический: $\|p'\|_E\leqslant\leqslant c(n+1)\|p\|_E$, ст. $p\leqslant n$.

7. Таблица 1 содержит некоторые примеры к теоремам 1—8 (всюду $1\leqslant p<\infty$ и $1/p'+1/p=1$).

Пример, когда теорема 8 заведомо не дает описания $\partial^*\mathscr{E}^*$: $\mathscr{E}=l_A^2(n^{1/2})$ — пространство функций с конечным интегралом Дирихле, $\partial^*\mathscr{E}^*=\{g:\sum\limits_{n\geqslant 0}|\hat{g}(n)|^2 z^n$ — мультипликатор в $l_A^\infty(n^{1/2})\}$.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
29 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. К. Никольский*. Зап. научн. семин. ЛОМИ, Л., 1972, стр. 30, 109. [2] *Суетин*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 100 (1971). [3] *А. И. Плоткин*, Вестн. Ленингр. унив., сер. матем., 1970, т. 1, 52 (1970). [4] *К. И. Бабенко*, ДАН, т. 62, 157 (1948). [5] *M. Rosenblum*, Trans. Am. Math. Soc., v. 105, № 1, 32 (1962).