Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 4

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. А. БАБЕШКО

НОВЫЙ ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ *

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 14 XII 1973)

1. В работах [1–3] получены интегральные уравнения задач о колебании штампов на поверхности упругого слоя. Интегральные уравнения некоторых из рассмотренных в [1] задач изучались в работе [4].

В настоящей работе приводятся новые представления решений интегральных уравнений динамических задач, в основе получения которых лежит метод факторизации функций.

Эти представления позволяют изучить колебания слоя при любой частоте и получить эффективные приближенные решения задач.

2. Установленные в работах [1, 2] теоремы единственности позволяют доказать разрешимость интегральных уравнений

$$\mathscr{K}_1 q \equiv \int_{-a}^{a} k(x-\xi)\, q(\xi)\, d\xi = f(x), \quad |x| \leqslant a, \quad k(x) = \int_{\sigma} K(u)\, e^{iux}\, du, \tag{1}$$

$$\mathscr{K}_2 q \equiv \int_{0}^{a} k(r,\rho)\, q(\rho)\, \rho \, d\rho = f(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a,$$

$$k(r,\rho) = \int_{\sigma_1} K(u)\, J_n(ur)\, J_n(u\rho)\, u\, du; \tag{2}$$

здесь сохранены принятые в работах [1, 2] обозначения и свойства функций.

Теорема 1. *Уравнения* (1), (2) *однозначно разрешимы в* L_α, $1<\alpha<2$, *при любой дважды непрерывно дифференцируемой правой части, при этом справедливы соотношения корректности*

$$\| q (a^2-x^2)^{1/2} \|_C \leqslant M \| f \|_{C_2}.$$

Метод доказательства аналогичен использованному в [5].

Формулируемая ниже теорема позволяет аппроксимировать ядра интегральных уравнений.

Теорема 2. *Пусть ядра интегральных уравнений*

$$\mathscr{K}_n q = f, \quad \mathscr{K}_n^* q^* = f, \quad n = 1, 2,$$

подчинены условию

$$|K(u) - K^*(u)|\, (1+u)^\alpha < \delta, \quad \delta > 0, \quad \alpha > 1{,}5, \quad 0 \leqslant u \leqslant \infty.$$

Тогда при достаточно малых δ *справедливо неравенство*

$$\| (q-q^*)(a^2-x^2)^{1/2} \|_C < \varepsilon \| q (a^2-x^2)^{1/2} \|_C,$$

причем $\varepsilon \to 0$, *если* $\delta \to 0$.

---

* Результаты настоящей заметки были доложены на XIII Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике в Москве.

Следующие теоремы дают представления решений уравнений (1), (2), которые ради простоты приводятся для правых частей соответственно $\exp i\eta x$, $J_n(\eta r)$. Если необходимо построить решения для произвольных правых частей, то последние нужно разложить соответственно в интегралы Фурье или Бесселя и затем проинтегрировать приводимые ниже решения по параметру η, предварительно умножив их на соответствующие трансформации. В ряде случаев могут проявиться интегралы в смысле главного значения, однако можно построить такие разложения правых частей, чтобы избежать этого.

Т е о р е м а 3. *Решение интегрального уравнения* (1) *для* $f(x)=\exp i\eta x$, $\operatorname{Im}\eta=0$, *дается соотношением*

$$q(x)=K^{-1}(\eta)\exp i\eta x+\frac{1}{4\pi}\int\limits_\sigma\{[X^+(u)-X^-(u)]e^{-iu(a+x)}+$$

$$+[X^+(u)+X^-(u)]e^{-iu(a-x)}\}K_+^{-1}(u)\,du,\quad |x|\leqslant a. \tag{3}$$

Функции $X^\pm(u)$ *регулярны в нижней полуплоскости, убывают там с весом и находятся из однозначно разрешимого уравнения*

$$X^\pm=\mp MX^\pm+\alpha^\pm,\quad MX=\int\limits_\sigma\frac{K_-(u)e^{-2aiu}X(u)\,du}{K_+(u)(u+\zeta)}, \tag{4}$$

$$\alpha^\pm(\zeta)=i\{K_-^{-1}(\eta)(\zeta-\eta)^{-1}e^{ia\eta}\pm K_+^{-1}(\eta)(\zeta+\eta)^{-1}e^{-ia\eta}\}.$$

Поведение левой части уравнения (1) описывается соотношением

$$\varphi_\pm(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_\sigma[X^+(u)\pm X^-(u)]K_-(u)e^{iu(a\mp x)}\,du; \tag{5}$$

верхний знак соответствует области $x>a$, нижний – области $x<-a$.

$$K(u)=K_+(u)K_-(u),\quad K_-(u)=K_+(-u); \tag{6}$$

здесь $K_+(u)$ – регулярная и без нулей в области выше контура σ функция со степенным законом убывания.

Т е о р е м а 4. *Решение интегрального уравнения* (2) *для* $f(r)=J_n(\eta r)$, $\operatorname{Im}\eta=0$, *дается соотношением*

$$q(r)=K^{-1}(\eta)J_n(\eta r)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\sigma\frac{I_n(itr)X(t)\,dt}{I_n(ita)K_+(t)}. \tag{7}$$

Функция $X(t)$, *мероморфная в нижней полуплоскости, убывающая с весом при* $|t|\to\infty$, *находится из однозначно разрешимого уравнения*

$$X+NX=D,\quad NX=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_\sigma\int\limits_{\sigma_-}\frac{P(t_1,t_2)X(t_1)\,dt_1\,dt_2}{t_2-z}, \tag{8}$$

$$P(t_1,t_2)=K_+(t_2)[R_1(t_1)+R_2(t_2)]/(t_2^2-t_1^2)K_+(t_1),$$

$$R_1(t)=tI_{n+1}(ita)I_n^{-1}(ita)-t,\quad R_2(t)=tK_{n+1}(ita)K_n^{-1}(ita)-t,$$

$$D(t)=\frac{1}{2\pi iK(\eta)}\int\limits_{\sigma'}\frac{[\tau K_{n+1}(ia\tau)J_n(\eta a)+i\eta K_n(ia\tau)J_{n+1}(\eta a)]K_+(\tau)\,d\tau}{(\eta^2-\tau^2)K(\eta)K_s(ia\tau)(t-\tau)} \tag{9}$$

Контур σ' совпадает с σ и обходит снизу полюсы $\tau=\pm\eta$; контур σ_- лежит ниже соответственно контура σ, но так, что между ними подынтегральная функция регулярна.

В справедливости теорем 3, 4 можно убедиться, если внести решения в левые части уравнений (1), (2) и произвести интегрирование. В случае совпадения нулей функций $J_n(az)$, $K_+(z)$ эти представления имеют иную форму.

3. Для построения эффективных приближенных решений уравнений (1), (2) на основании теоремы 2 аппроксимируем функцию $K(u)$. Для этого по вещественным нулям и полюсам функции $K(u)$ построим рациональную $R(u)$ вида $(m=p=s)$

$$R(u)=\prod_{k=1}^{s}(u^2-z_k^2)(u^2-\zeta_k^2)^{-1}.$$

В результате функция $T(u)$, представимая в форме

$$T(u)=K(u)R^{-1}(u)(u^2+b^2)^{0,5},\qquad b>0, \tag{10}$$

оказывается непрерывной на всей вещественной оси и имеет ограниченный не равный нулю на бесконечности предел.

Отображая теперь полуось $[0, \infty]$ на $[0, 1]$ преобразованием

$$x=u^2(u^2+A^2)^{-1},\qquad A>0, \tag{11}$$

придем от функции $T(u)$ к функции $\tau(x)$, заданной на $[0, 1]$, которую уже просто аппроксимировать полиномами Бернштейна:

$$\tau(x)\approx\sum_{n=0}^{N}\tau(n/N)C_N^n x^n(1-x)^{N-n}.$$

Возвращаясь теперь к старым переменным, приходим к аппроксимации функции $K(u)$ вида

$$K(u)\approx R(u)T(u)(u^2+b^2)^{-0,5}=K^*(u); \tag{12}$$

здесь $T(u)$ — рациональная функция, имеющая в точках $u=\pm iA$ полюс кратности N, а ее нули определяются четным полиномом порядка $2N$. Желая строить эффективные приближенные решения уравнений (1), (2) в возможно большем диапазоне изменения параметра $0<a\leqslant\infty$, будем в соотношении (10) параметр b задавать по возможности большим. Отметим, что это приводит к увеличению числа N, если в соотношении (12) фиксировать порядок погрешности.

Теперь не представляет труда факторизовать функцию $K^*(u)$, положив

$$K_+^*(u)=R_+(u)T_+(u)(b-iu)^{-0,5},\qquad K_-^*(u)=K_+^*(-u). \tag{13}$$

Считая, что $b\gg1$, внесем функции $K_\pm^*(u)$ в уравнения (4) для определения функции $X^\pm$ и деформируем контур σ вниз параллельно самому себе вплоть до точки ветвления $u=-ib$. В процессе деформации контура к интегралу добавляются вычеты в тех полюсах, которые пересеклись контуром. Эти вычеты представляют собой вырожденную составляющую оператора M, в то время как интеграл по деформированному контуру — малую составляющую. Действительно, норма оператора M по этому контуру имеет порядок $O(e^{-2ba})$. Пренебрегая этой составляющей оператора M, уже просто приходим к конечной системе линейных алгебраических уравнений для определения приближенных значений функций $X^\pm$, определитель которой приведен в работе [3]. Достоинством системы является, что для ее обращения необходимо вычислять определители лишь тёплицевых матриц, что довольно просто.

Совершенно аналогично строятся приближенные решения уравнения (8) с той лишь разницей, что в уравнении необходимо деформировать оба контура σ и σ_- одновременно в нижнюю полуплоскость вплоть до точки $u=-ib$, добавляя при этом вычеты в соответствующих полюсах. Интегралы по деформированным контурам представляют собой операторы, нормы которых имеют порядок $O(b^{-2}a^{-2})$ и являются малыми, а вычеты представляют собой вырожденную составляющую оператора N.

Дальнейшее решение задач не представляет труда.

В случае систем уравнений (1), (2) приходится факторизовать матрицы. В задачах о штампах матрицы $K(u)$ при больших u вырождаются в функционально-коммутативные $\Phi(u)$, которые факторизуются с помощью функций от матриц. После этого матрицы $\Phi_{\pm}{}^{-1}K(u)\Phi_{\mp}{}^{-1}$ легко аппроксимируются матрицами с рациональными коэффициентами; последние, как показал Н. П. Векуа, факторизуются в конечном виде. Формулы, описывающие решения систем уравнений, будут приведены в ближайшей публикации автора.

Автор благодарит чл.-корр. АН СССР И. И. Воровича за внимание к работе и советы.

Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики
Ростовского государственного университета

Поступило
7 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. А. Бабешко*, ДАН, т. 210, № 6 (1973). [2] *В. А. Бабешко*, ДАН, т. 213, № 3 (1973). [3] *В. А. Бабешко*, ДАН, т. 201, № 3 (1971). [4] *Н. М. Бородачев*, Динамическая контактная задача для толстой плиты в случае осевой симметрии. Тр. IV Всесоюзн. конфер. по теории пластин и оболочек, Ереван, 1964. [5] *В. А. Бабешко*, ПММ, т. 35, № 1 (1971).