Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 4

УДК 513.83 МАТЕМАТИКА

А. И. БАШКИРОВ

О КЛАССИФИКАЦИИ ФАКТОРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И СЕКВЕНЦИАЛЬНЫХ БИКОМПАКТАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 21 I 1974)

В настоящей заметке предложена трансфинитная классификация факторных отображений, которая позволяет окончательно сформулировать ряд результатов автора ([2]), причем даже в менее общем виде (для секвенциальных и k-пространств) они являются новыми. В совместной работе ([5]) А. В. Архангельский и С. П. Франклин, построив секвенциальные пространства любого секвенциального индекса, поставили следующие задачи, которые здесь решены (правда, вторая задача в предположении континуум-гипотезы CH): 1) для любого ординала α построить k-пространство k-индекса α; 2) для любых ординалов $\alpha<\beta\leqslant\omega_1$ построить секвенциальное пространство k-индекса α и секвенциального индекса β (s-индекса β).

Пусть дано отображение f: $(X, \mathcal{T})Y$. Трансфинитной рекурсией определим операторы C_ξ: $2^Y\to 2^Y$ и I_ξ: $2^X\to 2^X$: $C_0(B)=B$ и $I_0(A)=f^{-1}f(A)$; если ξ изолированный, то $C_\xi(B)=f[f^{-1}(C_{\xi-1}(B))]$ и $I_\xi(A)=f^{-1}f^{\#}\operatorname{Int} I_{\xi-1}(A)$; если ξ предельный, то $C_\xi(B)=\bigcup\limits_{\eta<\xi} C_\eta(B)$ и $I_\xi(A)=\bigcap\limits_{\eta<\xi} I_\eta(A)$.

Нетрудно показать, что следующие два свойства отображения f эквивалентны: 1) если $y\in[B]$, то $y\in C_\xi(B)$; 2) если $y\in fI_\xi(A)$, то $y\in\operatorname{Int}(fA)$. В этом случае скажем, что отображение f факторно ранга $\leqslant\xi$ в точке y: $r(y, f)\leqslant\xi$. Если отображение f факторно в каждой точке, то $r(f)=\sup\{r(y,f)\colon y\in Y\}$ называется рангом f. Псевдо-открытые отображения суть факторные ранга 1, а факторные — факторные некоторого ранга.

Все неопределяемые понятия, встречаемые в теоремах 1 и 2, можно найти в ([2]).

Теорема 1*. *Пусть f: $(X,\mathcal{T}(\gamma))\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ — отображение. Тогда:*

1) *Если f факторное, то $\mathcal{T}_Y=\mathcal{T}(f\gamma)$, причем $r(f\gamma)\leqslant r(f)\times r(\gamma)$.*

2) *Если $\mathcal{T}_Y=\mathcal{T}(f\gamma)$ и $f|\Gamma$ факторное для каждого $\Gamma\in\gamma$, то и f факторно, причем $r(f)\leqslant r(f\gamma)\times\sup\{r(f|\Gamma)\colon\Gamma\in\gamma\}$.*

Следствие *. *Пусть f: $(X,\mathcal{T}(\gamma))\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ — отображение, ранг γ равен 1, $f|\Gamma$ псевдо-открыто для каждого $\Gamma\in\gamma$ и выполнено одно из условий:* а) *отображение f факторно,* б) *$\mathcal{T}_Y=\mathcal{T}(f\gamma)$.*

Тогда выполнено и другое условие, причем $r(f)=r(f\gamma)$.

Теорема 2 *. *Пусть φ_X: $\oplus\{S\colon S\in\sigma_X(\mathcal{K})\}\to X$ — характеристическое отображение. Тогда X — пространство класса $\mathcal{K}_\xi$ тогда и только тогда, когда φ_X факторное ранга ξ.*

В предположении, что класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно перехода к непрерывным образам, имеем, что факторный ранга η образ пространства класса $\mathcal{K}_\xi$ принадлежит $\mathcal{K}_{\eta\times\xi}$, а класс $\mathcal{K}_\xi$ совпадает с классом факторных ранга ξ образов $l\mathcal{K}$.

Теорема 3. *Счетное произведение счетно-компактных секвенциальных пространств секвенциально.*

---

* Теоремы 1 и 2 имеют «точечные» аналоги. Через $\xi\times\eta$ обозначается лексикографическое произведение с предпочтением первому сомножителю.

Теорема 4 *. *Пусть f: $X \to Y$ — замкнутое отображение регулярного пространства X на секвенциальное пространство Y s-индекса $\leqslant \xi$, причем прообразы всех точек $y \in Y$ — секвенциальные FG_δ-пространства s-индекса $\leqslant \eta$. Тогда X секвенциально s-индекса $\leqslant \xi + \eta$.*

Следствие ** (СН). *Пусть f: $X \to Y$ — отображение бикомпактов. Тогда X секвенциально в том и только в том случае, если секвенциальны Y и $f^{-1}y$ для всех $y \in Y$.*

Пусть пространства $(X_{\alpha+1}, x_{\alpha+1})$ с отмеченной точкой занумерованы изолированными ординалами, меньшими β. Трансфинитной суммой $\sum \{(X_{\alpha+1}, x_{\alpha+1}): \alpha+1 < \beta\}$ называется фактор-пространство дискретной суммы $[1, \beta] \oplus \oplus \{X_{\alpha+1}: \alpha+1 < \beta\}$ при отождествлении точек $\alpha+1$ и $x_{\alpha+1}$. При помощи аналога предложения 2.1 из [5] можно доказать теорему 5.

Теорема 5. *Для всякого бесконечного ординала α существует нульмерное нормальное k-пространство k-индекса α мощности $|\alpha|$.*

Лемма 2 ***. *Пусть $\{N_i\}$ — счетная система бесконечных подмножеств N_i натурального ряда N, R — разбиение $U = \bigcup N_i^*$, причем множества N_i^* являются отмеченными относительно R, а N_i^*/R — нульмерные бикомпакты; счетное множество точек x_i дискретно в U/R, а σ_i — некоторая база в x_i открыто-замкнутых множеств в U/R. Тогда найдутся подмножество $N' \subset N$ и попарно дизъюнктные $O_i \in \sigma_i$ такие, что $N'^* \cap U = \cup O_i$.*

Теорема 6 **** [СН]. *Существуют бикомпакты любого s-индекса.*

Схема доказательства. Занумеруем все счетные дизъюнктные семейства C открыто-замкнутых в N^* множеств: $\mathscr{C} = \{C_\xi: \omega_0 \leqslant \xi < \omega_1\}$. Построение бикомпактов проводится трансфинитной рекурсией по s-индексу. Если построены бикомпакты индексов меньших, чем предельный ординал β, то одноточечная бикомпактификация их дискретной суммы есть бикомпакт индекса β.

Таким образом, задача сводится к построению бикомпактов, s-индекс которых является изолированным ординалом. Мы построим множество таких бикомпактов, причем все они суть пространства разбиения βN, в котором только точки натурального ряда N являются одноточечными элементами разбиения. Все такие разбиения будем называть разбиениями типа $\beta+1$, а бикомпакты — пространствами типа $\beta+1$, если s-индекс их равен $\beta+1$.

Множество разбиений и пространств типа $\beta+1$ удовлетворяет условиям:

S0. Всякое пространство однозначно представлено в виде дизъюнктной суммы $\cup \{L_{\gamma+1}: \gamma \in [0, \beta]\}$.

S1. Точки уровня $\gamma+1$, т. е., принадлежащие множеству $L_{\gamma+1}$, имеют s-индекс $\gamma+1$.

S2. Множество $L_{\beta+1}$ состоит только из одной точки.

S3. Каждая точка ненулевого уровня имеет базу открыто-замкнутых множеств, называемых элементарными, со следующим свойством: если O — элементарная окрестность точки уровня $\gamma+1$, то исходное разбиение, ограниченное на O, есть разбиение типа $\gamma+1$ (S3 корректно, так как $\bar{O}$ гомеоморфно βN).

S4. Если нестационарная последовательность точек $x_n \in L_{\gamma_n+1}$ сходится к точке $x \in L_{\gamma+1}$, то последовательность ординалов γ_n+1 сходится к γ.

---

* X называется FG_δ-пространством, если во всяком замкнутом в X множестве F найдется G_δ-точка в F; СН влечет, что все секвенциальные бикомпакты являются FG_δ-пространствами [1]. Теорему 4 ср. с [7].

** Б. Шапировский заметил, что это следствие верно в предположении $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, а также в аксиоме Мартина.

*** Если $D \subset N$, то $D^* = [D]_{\beta N} \setminus D$. Если R — разбиение U, φ: $U \to U/R$ — естественное отображение, то $\tilde{A} = \varphi^{-1}A$ при $A \subset U/R$; $B \subset U$ отмечено, если $B = \varphi^{-1}\varphi(B)$.

**** Секвенциальный бикомпакт индекса 3 можно построить в предположении обобщенной аксиомы отделимости Кантора и Дюбуа — Раймонда: если тела двух систем Δ_0 и Δ_1 открыто-замкнутых в N^* множеств не пересекаются и $|\Delta_0| \leqslant \aleph_0$, а $|\Delta_1| < \mathfrak{c}$, то $[\cup \Delta_0] \cap [\cup \Delta_1] = \varnothing$. Эта аксиома легко следует из СН [4, 8], она выполнена и при аксиоме Мартина [3].

S5. Если $\{N_i\}$ — счетная система попарно дизъюнктных бесконечных подмножеств N_i натурального ряда N и на $[N_i]$ заданы разбиения типа β_i+1, причем $\sup\{\beta_i+1\}=\beta$, то полученное разбиение $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[N_i]$ можно продолжить до разбиения βN типа $\beta+1$.

Из этих свойств тривиально выводятся

S6. Если O — элементарная окрестность точки уровня $\gamma+1$, то ее уровень в O также равен $\gamma+1$.

S7. Если O — элементарная окрестность точки x уровня $\gamma+1$, то $O\setminus\{x\}\subseteq\cup\{L_{\gamma'+1}\colon\ \gamma'<\gamma\}$.

База рекурсии: множество разбиений βN типа 1 и 2. Множество бикомпактов типа 1 состоит из одного элемента: сходящейся последовательности, единственный неодноточечный элемент разбиения есть нарост N^*. Бикомпакты типа 2 построены в ([6]): пусть $\mathscr{F}$ — максимальная дизъюнктная система открыто-замкнутых в N^* множеств, тогда неодноточечными элементами разбиения являются все $f\in\mathscr{F}$ (им соответствуют точки первого уровня) и $N^*\setminus\cup\mathscr{F}$ — точка второго уровня. Элементарными окрестностями точки $f\in\mathscr{F}$ будут множества $\{f\}\cup A$, где $f=A^*$, а точки второго — любая ее открыто-замкнутая окрестность.

Итак, преположим, что для всех $\beta+1<\alpha+1$ множества разбиений типа $\beta+1$ построены. Мы должны построить множество разбиений типа $\alpha+1$, удовлетворяющее S0–S5.

Пусть $\{N_i\}$ — система попарно дизъюнктных бесконечных подмножеств $N_i\subset N$ и на $[N_i]$ построены разбиения R_i типа β_i+1, причем $\sup\{\beta_i+1\}=\alpha$. Трансфинитной рекурсией по счетным ординалам строим бесконечные подмножества $N_\gamma\subset N$ и разбиения R_γ на $[N_\gamma]$ типа $\beta_\gamma+1<\alpha+1$, удовлетворяющие условиям:

T1. $N_\gamma^*\setminus[\cup\{N_{\gamma'}^*\colon \gamma'<\gamma\}]\neq\emptyset$.

T2. $[\cup\{N_{\gamma'}^*\colon \gamma'\leqslant\gamma\}]\neq N^*$.

T3. Для всех $\gamma'<\gamma$ разбиения $R_{\gamma'}$ и R_γ совпадают на $[N_{\gamma'}]\cap[N_\gamma]$.

T4. Все C_ξ с номерами $\xi\leqslant\gamma$ не являются $(\gamma+1)$-семействами.

На $U_\gamma=\cup\{N_{\gamma'}^*\colon\ \gamma'<\gamma\}$ (ввиду T3) определено некоторое разбиение Q_γ; скажем, что $C\in\mathscr{C}$ есть γ-семейство, если C можно разбить на два подсемейства C_0 и C_1 так, что выполнены:

U1. $\cup C_0\cap U_\gamma=\emptyset$; для всех $c\in C_0$ положим $\gamma_c=0$.

U2. Для каждого $c\in C_1$ найдутся $\gamma'<\gamma$, точка $x_c\in[N_{\gamma'}]/R_{\gamma'}$ уровня γ_c+1 и ее элементарная окрестность O_c, что $c=\tilde{O}_c\cap N^*$.

U3. Множество $\{x_c\colon\ c\in C_1\}$ дискретно в U_γ/Q_γ.

U4. $\sup\{\gamma_c+1\colon\ c\in C\}=\beta_\gamma<\alpha$.

Множества N_i и разбиения R_i нам даны. Предположим, что построены N_γ и R_γ для всех $\gamma<\delta$. Покажем, как строится N_δ и R_δ. На $U_\delta=\cup\{N_\gamma^*\colon\ \gamma<\delta\}$ определено (в силу T3) разбиение Q_δ. Возьмем δ-семейство C_ξ с минимальным номером (такое найдется по T2) и по лемме 2 выберем N_δ' и $\{O_c'\colon\ c\in C_1\}$, где O_c' элементарны. Положим $C'=C_0\cup\{\tilde{O}_c'\cap N^*\colon\ c\in C_1\}$, найдем такое $N_\delta''\subset N$, что $[N_\delta'']\supseteq\cup C_0$ и $[N_\delta'']\cap U_\delta=\emptyset$, а в $N_\delta'\cup N_\delta''$ — такое N_δ, что $[N_\delta]\supseteq\cup C'$ и $(N_\delta'\cup N_\delta'')^*\setminus N_\delta^*\neq\emptyset$. Множество N_δ разобьем в дизъюнктную сумму $N_{\delta,c}$ таких, что $c=N_{\delta,c}^*$, где $c\in C'$. Теперь на $[N_\delta]$ по S5 (ввиду S6 и U4) строим разбиение R_δ типа $\beta_\delta+1$ на основе уже построенных разбиений на $[N_{\delta,c}]$.

Нетрудно убедиться, что свойства T1–T4 выполнены.

Таким образом, на $\cup\{[N_\gamma]\colon\ \gamma<\omega_1\}$ определено разбиение, совпадающее с R_γ на $[N_\gamma]$; дополним его еще одним элементом $N^*\setminus\cup\{N_\gamma^*\colon\ \gamma<\omega_1\}$ (по T2 он не пуст), считаем, что точка, ему соответствующая, и составляет множество $L_{\alpha+1}$. Если некоторый элемент полученного разбиения является элементом разбиений R_δ и R_γ, то соответствующая точка (по S6) лежит на одинаковых уровнях в $[N_\delta]/R_\delta$ и $[N_\gamma]/R_\gamma$, поэтому определение $L_{\beta+1}$ как множества точек, лежащих на уровне $\beta+1$ в каком-либо $[N_\gamma]/R_\gamma$, корректно. Элементарные окрестности точек уровней, меньших $\alpha+1$, также переносятся с $[N_\gamma]/R_\gamma$.

Оставшееся доказательство распадается на ряд последовательно доказываемых утверждений.

1) Множества вида $X \setminus \bigcup_{x\in K} O_x$, где K конечно, а O_x — элементарные окрестности, образуют базу в точке уровня $\alpha+1$. Эти окрестности назовем элементарными.

2) Полученное пространство разбиения X хаусдорфово.

3) В X выполнено свойство S4.

4) X секвенциально

5) Пусть множество A замкнуто в $\cup\{L_{\gamma+1}\colon \gamma+1\leqslant\eta\}$. Тогда $[A]\cap\cup\{L_{\gamma+1}\colon \gamma+1\leqslant\eta+1\}=\mathscr{F}_1(A)$, где $\mathscr{F}_1(A)$ есть множество точек, являющихся пределами сходящихся последовательностей из A.

6) Индекс секвенциальности точки уровня $\beta+1$ равен $\beta+1$.

7) Рассмотрим множество всех так построенных разбиений и пространств и всех элементарных окрестностей точек уровня $\alpha+1$, которые естественно определяются как пространства разбиений $[N']$ для некоторого подмножества $N'\subset N$. Тогда это множество удовлетворяет условиям S0—S5. Теорема доказана.

Следствие (CH). *Для $\alpha\leqslant\beta\leqslant\omega_1$ существует секвенциальное пространство k-индекса α и индекса секвенциальности β.*

Таким является дискретная сумма секвенциального пространства, у которого k-индекс$=s$-индекс$=\alpha$ ([5]), и секвенциального бикомпакта индекса β.

Примечание при корректуре. Недавно В. В. Федорчук в предположении существования универсальной гиперпоследовательности построил пример наследственно сепарабельного несеквенциального бикомпакта. При несколько более слабых предположениях, методом, аналогичным примененному в доказательстве теоремы 6, можно построить пример несеквенциального бикомпакта счетной тесноты.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. В. Архангельский*, ДАН, т. 192, № 2 (1970). [2] *А. И. Башкиров*, ДАН, т. 207, № 5 (1972). [3] *В. И. Малыхин, Б. Э. Шапировский*, ДАН, т. 213, № 3 (1973). [4] *И. И. Паровиченко*, ДАН, т. 150, № 1 (1963). [5] *A. V. Archangel'skii, S. P. Franklin*, Michigan Math. J., v. 15, № 3 (1968). [6] *S. P. Franklin*, Fund. Math., v. 61, № 1 (1967). [7] *Y. Tanaka*, Sci. Rep. Tokyo Kyocku Daygaku, Ser A, v. 11, № 1 (1971). [8] *W. Rudin*, Duke Math. J., v. 23, № 3 (1956).