

В. А. БОРОВИКОВ

**ДИФРАКЦИЯ НА ОТКРЫТОМ КОНЦЕ ВОЛНОВОДА С ФЛАНЦЕМ**

(Представлено академиком А. В. Гапоновым-Греховым 13 IX 1973)

1. Рассматривается дифракция на открытом конце волновода с примыкающими к нему под углами  $\Phi_1, \Phi_2$  бесконечными фланцами (рис. 1). Асимптотическое (при  $k \rightarrow \infty$ ) решение этой задачи сводится к определению диаграмм направленности суммарных (т. е. обусловленных как первичной, так и многократной дифракцией) краевых волн от кромок  $A_1$  и  $A_2$  (<sup>1, 5</sup>). Основной проблемой при их вычислении является расчет вклада

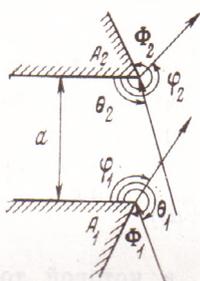


Рис. 1

в диаграммы от поля многократной дифракции, т. е. учет взаимодействия кромок. В каждом элементарном акте взаимодействия (после вторичной дифракции) кромка оказывается на границе тень — свет для поля, отраженного от противоположной стенки волновода. Поэтому все волны многократной дифракции дают вклад в решение одного и того же порядка по  $k$ , а для их расчета обычные методы геометрической теории дифракции неприменимы.

В известной работе (<sup>1</sup>) асимптотика диаграмм краевых волн для волновода без фланцев ( $\Phi_1 = \Phi_2 = 2\pi$ ) определяется из анализа найденного строгого решения и автоматически учитывает как первичную дифракцию, так и взаимодействие кромок. В (<sup>3</sup>) учет взаимодействия проводится методом последовательной дифракции; при каждой дифракции падающее на кромку поле аппроксимируется комбинацией ненаправленных источников. У полученного выражения верен лишь главный член асимптотики (соответствующий первичной дифракции); оно неприменимо при углах падения  $\theta_1, \theta_2$  или наблюдения  $\varphi_1, \varphi_2$ , близких к  $\pi/2, 3\pi/2$ . В (<sup>3</sup>) для коэффициентов отражения и трансформации собственных волноводных волн на открытом конце волновода с фланцем дана формула, полученная интерполяцией известных ранее асимптотических выражений для случая, когда углы Бриллюэна  $\theta, \varphi$  падающей и уходящих волн далеки от  $\pi/2$ , и для случая, когда оба эти угла близки к  $\pi/2$ . Эта формула дает верный главный член асимптотики при всех  $\theta, \varphi$ , но при  $\theta, \varphi \neq \pi/2$  неверно описывает взаимодействие кромок. Найденное в (<sup>3</sup>) выражение для вклада поля взаимодействия в диаграмму излучения также применимо лишь при  $\theta, \varphi$ , близких к  $\pi/2$ .

В настоящей работе для учета взаимодействия в качестве модельной задачи берется случай  $\Phi_1 = \Phi_2 = 2\pi$  (см. (<sup>1</sup>)). Это позволяет найти два старших члена асимптотики диаграмм краевых волн при всех  $\theta_{1,2}, \varphi_{1,2}, \Phi_{1,2}$ . Однако необходимые выкладки и получающиеся выражения весьма громоздки. Поэтому мы ограничимся здесь выводом более простых формул, дающих два старших члена диаграмм краевых волн при  $\theta_{1,2}, \varphi_{1,2}$ , далеких от  $\pi/2, 3\pi/2$ . Кроме того для случая падения на открытый конец собственной волноводной волны мы приведем без вывода выражение для диаграмм краевых волн, применимое при любых углах Бриллюэна  $\theta$  падающей волны (но при  $\varphi_{1,2}$ , далеких от  $\pi/2, 3\pi/2$ ), а также выражение для коэффициентов ее отражения и трансформации в уходящие волновод-

ные волны, применимое при всех  $\theta, \varphi$  ( $\varphi$  — угол Бриллюэна уходящей волны).

Ниже  $k$  — волновое число,  $a$  — ширина волновода,  $u_1, u_2$  — значение первичного поля в вершинах  $A_1, A_2$ ; углы падения  $\theta_{1,2}$  и наблюдения  $\varphi_{1,2}$  отсчитываются от стенок волновода (рис. 1);  $\varepsilon = -1$  для граничного условия Дирихле и  $\varepsilon = 1$  для условия Неймана;  $s(\varphi) = (ka)^{1/2} \cos \varphi$ . Будем искать выражение для диаграмм  $G_1$  краевой волны кромки  $A_1$ ; выражение для  $G_2$  получается из формул для  $G_1$  перестановкой индексов 1, 2.

2. Найдем неравномерную асимптотику  $G_1$ , применимую, если кромки  $A_1, A_2$  находятся вдали от границ тень — свет первичного поля (т. е. при  $|s(\theta_{1,2})| \gg 1$ ), а направление наблюдения удалено от границ тень — свет поля многократной дифракции (т. е. при  $|s(\varphi_{1,2})| \gg 1$ ). Покажем, что

$$G_1 = u_1 D_1(\theta_1, \varphi_1) + \left[ u_1 D_1\left(\theta_1, \frac{\pi}{2}\right) \frac{\varepsilon T}{a^{1/2}} + u_2 D_2\left(\theta_2, \frac{\pi}{2}\right) \frac{S}{a^{1/2}} \right] D_1\left(\frac{\pi}{2}, \varphi_1\right) + O(k^{-3/2}), \quad (1)$$

где  $T, S$  подлежат определению, а  $D_{1,2}(\alpha, \beta) = D(\alpha, \beta, \Phi_{1,2})$  — коэффициент дифракции,  $D(\alpha, \beta, \Phi) = (\xi i^{1/2} / (2\pi k)^{1/2}) [\operatorname{ctg} \xi(\alpha - \beta - \pi) - \operatorname{ctg} \xi(\alpha - \beta + \pi) + \varepsilon \operatorname{ctg} \xi(\alpha + \beta - \pi) - \varepsilon \operatorname{ctg} \xi(\alpha + \beta + \pi)]$ ;  $\xi = \pi / (2\Phi)$ .

Поясним физический смысл отдельных слагаемых в (1). Первое слагаемое — диаграмма краевой волны первичной дифракции. Второе — главный член асимптотики вклада в  $G_1$  от поля взаимодействия кромок, равный произведению значения в  $A_1$  этого поля (пришедшего из  $A_2$ , т. е. из направления  $\pi/2$ ) на коэффициент дифракции  $D_1(\pi/2, \varphi_1)$ . В свою очередь, поле взаимодействия является суммой двух слагаемых, возбужденных краевыми волнами первичной дифракции кромок  $A_1, A_2$ . Первое слагаемое пропорционально (в принятом приближении) диаграмме первичной краевой волны кромки  $A_1$  в направлении на  $A_2$ , т. е. величине  $u_1 D_1(\theta_1, \pi/2)$ . Второе — величине  $u_2 D_2(\theta_2, \pi/2)$ . Через  $\varepsilon T/a^{1/2}$  и  $S/a^{1/2}$  мы обозначили подлежащие определению коэффициенты пропорциональности; очевидно, они не зависят от  $\theta_{1,2}, \varphi_{1,2}$ ; как мы сейчас увидим,  $T, S$  зависят только от  $ka$ .

3. Функция  $\varepsilon T/a^{1/2}$  — это значение в  $A_1$  пришедшего из  $A_2$  поля взаимодействия, возбужденного расположенным в  $A_1$  ненаправленным источником  $\exp(ikr)/r^{1/2}$ . Она является суммой отдельных компонент, представляющих собой значения полутеневого поля (или его более сложных аналогов) на границах тень — свет для однократного, трехкратного и последующих отражений поля этого источника от стенок волновода (рис. 2, а). Поэтому, во-первых,  $\varepsilon T/a^{1/2}$  в принятом приближении не зависит от  $\Phi_1, \Phi_2$ , так как от этих углов не зависит отраженное поле. Во-вторых, при переходе от граничного условия Неймана к условию Дирихле  $\varepsilon T/a^{1/2}$  вместе с отраженными полями меняет знак, чем и объясняется выделение множителя  $\varepsilon$ . Аналогично,  $S/a^{1/2}$  состоит из компонент, отвечающих четному числу переотражений; как и  $\varepsilon T/a^{1/2}, S/a^{1/2}$  не зависит от  $\Phi_1, \Phi_2$ , но в отличие от  $\varepsilon T/a^{1/2}, S/a^{1/2}$  не меняет знака при переходе от условия Неймана к условию Дирихле.

Поскольку  $T, S$  не зависят от  $\Phi_1, \Phi_2$ , их можно найти из известного решения <sup>(1)</sup> для  $\Phi_1 = \Phi_2 = 2\pi$ . Первые два члена асимптотики этого решения имеют угловую зависимость, предписанную <sup>(1)</sup>, а для  $T, S$  мы получаем

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m(2m)^{1/2}} e^{ik_a \cdot 2m}, \quad S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2m-1)^{1/2}} e^{ik_a \cdot (2m-1)}, \quad (2)$$

чем и заканчивается вывод формулы (1) для диаграммы  $G_1$ .

4. Выражения (2) допускают простую физическую интерпретацию. Функции  $T/a^{1/2}$ ,  $S/a^{1/2}$  состоят из слагаемых, каждое из которых соответствует  $n$ -кратной дифракции на кромках ( $T$  нечетные,  $n=2m-1$ ;  $S$  четные,  $n=2m-2$ ) и совпадает в главном члене асимптотики со значением  $w_n(P)$  поля от ненаправленного источника  $Q$ , если  $PQ=d=(n+1)a$ , а на отрезке  $QP$  находится  $n$  равноотстоящих кромок (см. рис. 2б, полученный «разверткой» рис. 2а). Из (2) следует, что

$$w_n(P) = \frac{1}{(n+1)((n+1)a)^{1/2}} e^{ik(n+1)d} + O(k^{-1/2}), \quad (3)$$

т. е. равно значению  $\exp(ikd)/d^{1/2}$  первичного поля в  $P$ , деленному на коэффициент ослабления  $n+1$ . Формула (3) очевидна при  $n=0$ , когда между  $Q$  и  $P$  нет кромок, и легко проверяется при  $n=1, 2$ , когда поле в  $P$  выражается соответственно через интеграл Френеля и обобщенный интеграл Френеля (4). При прочих  $n$  непосредственный (не зависящий от (1)) вывод (3) также возможен, но требует громоздких выкладок.

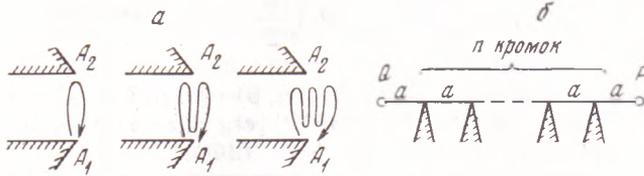


Рис. 2

5. Формула (1) неприменима при  $\theta_{1,2}$ ,  $\varphi_{1,2}$ , близких к  $\pi/2$ ,  $3\pi/2$ , т. е. вблизи полюсов функций  $D_{1,2}(\theta_{1,2}, \pi/2)$ ,  $D_1(\pi/2, \varphi_1)$ . Развивая соображения пп. 2, 3, а также используя теорему взаимности, можно получить, в частности, в случае падения на открытый конец собственной волноводной волны следующее выражение для диаграммы  $G_1$ , применимое при всех углах Бриллюэна  $\theta$ , но лишь при угле наблюдения  $\varphi_1$ , отличном от  $\pi/2$ ,  $3\pi/2$  (ниже  $u_1, u_2$  — это значения в  $A_1, A_2$  падающих на кромки волн Бриллюэна):

$$G_1 = u_1 e^{v(\theta, K\varepsilon)} \left\{ D_1(\theta, \varphi_1) + \frac{1}{a^{1/2}} D_1\left(\frac{\pi}{2}, \varphi_1\right) \left[ \varepsilon T \Delta_1\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) + K S \Delta_2\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) \right] + \frac{i^{1/2}}{(2\pi ka)^{1/2}} (T + K\varepsilon S) \cdot \frac{D_1(\theta, \varphi_1) - D_1(\pi/2, \varphi_1) R(\varepsilon, \theta)}{\cos \theta} \right\} \times (1 + O(k^{-1})); \quad (4)$$

здесь  $K$  — четность первичной волны:  $K=1$ , если  $u_1=u_2$ , и  $K=-1$ , если  $u_1=-u_2$ ;  $v(\theta, K\varepsilon) = U(s(\theta), ka/(2\pi) + (1-K\varepsilon)/(4\pi))$ , где  $U(s, q)$  — функция Вайнштейна (см. (1), формула (10.19));  $R(\varepsilon, \theta) = \cos(\pi/4 - \theta/2) + \varepsilon \cos(\pi/4 + \theta/2)$ ;  $\Delta_{1,2}(\theta, \varphi) = D(\theta, \varphi, \Phi_{1,2}) - D(\theta, \varphi, 2\pi)$ . Функции  $\Delta_{1,2}$  регулярны при  $\theta = \varphi = \pi/2$ , поскольку полюсы функций  $D(\theta, \varphi, \Phi)$ ,  $D(\theta, \varphi, 2\pi)$  при этих значениях  $\theta, \varphi$  взаимно уничтожаются.

6. Приведем теперь выражение для коэффициента отражения и перетрансформации собственной волноводной волны на открытом конце волновода, применимое при всех углах  $\theta, \varphi$ :

$$R = \left(\frac{i}{k}\right)^{1/2} \frac{\delta}{4a \cos \varphi} e^{v(\theta, K\varepsilon) + v(\varphi, N\varepsilon)} \left\{ D_1(\theta, \varphi) + K N D_2(\theta, \varphi) + \varepsilon T [\Delta_1(\theta, \pi/2) \Delta_1(\varphi, \pi/2) + K N \Delta_2(\theta, \pi/2) \Delta_2(\varphi, \pi/2)] + S [K \Delta_2(\theta, \pi/2) \Delta_1(\varphi, \pi/2) + N \Delta_2(\varphi, \pi/2) \Delta_1(\theta, \pi/2)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{i}{2\pi ka} \right)^{1/2} \left[ \frac{(T+N\epsilon S)}{\cos \varphi} (\Delta(\theta, \varphi) - \Delta(\theta, \pi/2)R(\epsilon, \varphi)) + \right. \\
 & \left. + \frac{(T+K\epsilon S)}{\cos \theta} (\Delta(\theta, \varphi) - \Delta(\pi/2, \varphi)R(\epsilon, \theta)) \right] \} (1+O(k^{-1})); \quad (5)
 \end{aligned}$$

здесь  $\varphi$  — угол Бриллюэна уходящей волны,  $N$  — ее четность;  $\delta=1$  при  $\varphi=0$  и  $\delta=2$  при  $\varphi \neq 0$ ;  $\Delta(\theta, \varphi) = \Delta_1(\theta, \varphi) + KN\Delta_2(\theta, \varphi)$ . Главный член асимптотики этого выражения совпадает с формулой, предложенной в (3).

7. Результаты п. 4 позволяют выразить через  $T, S$  асимптотическое решение задач дифракции, в которых отдельные компоненты поля взаимодействия моделируются ситуацией, показанной на рис. 2б. Примерами таких задач является дифракция на гребенчатой структуре, на эшелоне Майкельсона, на изломе волновода и т. п. Приведем еще одно обобщение формул (1), (2). Найдем излучение из открытого конца волновода со стенками, покрытыми слоем диэлектрика, т. е. волновода с импедансным граничным условием  $\partial u / \partial v = ika\alpha u$  ( $\alpha$  может принимать различные значения на стенках и фланцах волновода). Положим

$$T = K_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(K_1 K_2)^{m-1}}{2m(2m)^{1/2}} e^{iKa \cdot 2m}, \quad S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(K_1 K_2)^{m-1}}{(2m-1)(2m-1)^{1/2}} e^{iKa(2m-1)}$$

где  $K_1$  ( $K_2$ ) — коэффициент отражения от нижней (верхней) стенки волновода при нормальном падении. Тогда

$$\begin{aligned}
 G_1(\varphi_1) = & u_1 D_1(\theta_1, \varphi_1) + [u_1 D_1(\theta_1, \pi/2) \bar{T} + \\
 & + u_2 D_2(\theta_2, \pi/2) \bar{S}] D_1(\pi/2, \varphi_1) / a^{1/2} + O(k^{-3/2}),
 \end{aligned}$$

где  $D_{1,2}$  — коэффициенты дифракции для кромок  $A_1, A_2$  (см. (2)).

Автор благодарит чл.-корр. АН СССР Л. А. Вайнштейна за обсужденные работы и конструктивную критику.

Институт прикладной математики  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
29 VIII 1973

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, М., 1966. <sup>2</sup> А. Ф. Филиппов, М. П. Сахарова, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 7, № 3, 568 (1967). <sup>3</sup> П. Я. Уфимцев, Тр. Международного симпозиума URSI в Тбилиси, «Наука», 1971, стр. 107. <sup>4</sup> Р. Х. Хестанов, В. А. Тищенко, Тр. VI Всесоюз. симпозиума по дифракции волн, т. I, Ереван, 1973, стр. 222. <sup>5</sup> Н. Y. Yee, L. B. Felsen, J. B. Keller, SIAM J. Appl Math., v. 16, № 2, 268 (1968).