Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 4

УДК 539.376:517.43 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Э. И. ГОЛЬДЕНГЕРШЕЛЬ

СПЕКТР ВОЛЬТЕРРОВА ОПЕРАТОРА НА ПОЛУОСИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЭЙЛЕРУ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 24 I 1974)

Настоящая работа примыкает к работам автора [5] и [13].

1°. Пусть $\alpha(t)$ — скалярная функция, непрерывная и положительная на $[0, \infty)$. Обозначим через $M_{\langle\alpha(t)\rangle}$ банахово пространство n-компонентных вектор-функций $f(t)$, измеримых и почти всюду ограниченных на каждом конечном интервале полуоси $[0, \infty)$, с нормой

$$\|f\|_{\langle\alpha(t)\rangle}=\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t<\infty}|f(t)|\alpha(t). \tag{1,1}$$

Через $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$ обозначим подпространство пространства $M_{\langle\alpha(t)\rangle}$, состоящее из тех f, для которых существует

$$L_\alpha f=\lim_{t\to\infty} f(t)\alpha(t), \tag{1,2}$$

и через $Z_{\langle\alpha(t)\rangle}$ — подпространство тех f, для которых $L_\alpha f=0$ [3, 5]. В этих пространствах мы будем рассматривать вольтерров оператор V:

$$(Vf)(t)=\int_0^t K(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \tag{1,3}$$

с непрерывным или слабо сингулярным в области $0\leqslant\tau\leqslant t<\infty$ ядром.

Теорема 1. а) *Пусть*

1) $\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}\int_0^t |K(t,\tau)|\dfrac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}d\tau<\infty$;

2) $\lim\limits_{t\to\infty}\int_E K(t,\tau)\dfrac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}d\tau=0$ *для любого измеримого ограниченного множества* $E\subset[0,\infty)$.

Тогда спектр оператора V (1,3) *в* $Z_{\langle\alpha(t)\rangle}$ *совпадает с его спектром в* $M_{\langle\alpha(t)\rangle}$.

b) *Пусть* $K(t,\tau)$, *кроме условий* 1) *и* 2), *удовлетворяет еще условию*

3) $T_K=\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t K(t,\tau)\dfrac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}d\tau$ *существует.*

Тогда спектр оператора V (1,3) *в* $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$ *также совпадает с его спектром в* $M_{\langle\alpha(t)\rangle}$.

c) *Если все элементы матрицы-функции* $K(t,\tau)$ *неотрицательны и* $K(t,\tau)$ *удовлетворяет условию* 2) *для множеств* E *вида* $[0, l]$, *где* l — *любое положительное число, и условию* 3), *то спектральный радиус оператора* V (1,3) *в* $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$ *совпадает со спектральным радиусом* $r(T_K)$ *матрицы* T_K *и интервал* $[0, r(T_K)]$ *вещественной оси принадлежит спектру оператора* V (1,3) *в* $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$.

d) *Если λ является регулярной точкой оператора V (1,3) в $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$ и $f(t)$ есть решение уравнения*

$$\int_0^t K(t,\tau)f(\tau)\,d\tau-\lambda f(t)=g(t),\quad g\in\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle},$$

то

$$L_\alpha f=(T_K-\lambda I)^{-1}L_\alpha g.$$

Теорема 1 обобщает результаты З. Б. Цалюка ([10], [11]). Она существенно упрощает доказательства тауберовых теорем типа Пэли — Винера — Гельфанда для вольтеррова оператора. Сама тауберова теорема И. М. Гельфанда ([1], [2]) является непосредственным следствием теоремы 1 и теоремы о множестве максимальных идеалов кольца $V_+^{\langle\alpha\rangle}$ (([2]), стр. 123).

Из теоремы 1 следует дальнейшее (по отношению к содержащемуся в ([5])) обобщение тауберовой теоремы И. М. Гельфанда ([1]) на случай ненулевых предельных значений.

2°. Рассмотрим приложение теоремы 1 к исследованию устойчивости по Эйлеру вязкоупругих стержней.

Пусть тонкий вязкоупругий стержень переменного сечения конечной длины l находится под действием продольной сжимающей силы P и под влиянием медленно меняющейся внешней поперечной нагрузки $p(x, t)$ подвергается слабому изгибу ([7]). Тогда прогиб $y(x, t)$ оси стержня описывается следующей краевой задачей ([7], [8]):

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)-P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-P\int_0^t K(t,\tau)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,d\tau=$$

$$=-p(x,t)-\int_0^t K(t,\tau)p(x,\tau)\,d\tau;\quad 0\leqslant x\leqslant l;\quad 0\leqslant t<\infty; \tag{2,1}$$

$$U_i[y]=0,\quad i=1,2,3,4; \tag{2,2}$$

здесь (2,2) — штурмовы самосопряженные краевые условия, $K(t, \tau)$ — ядро ползучести материала стержня, $J(x)$ — момент инерции относительно оси сечения стержня с абсциссой x, E — мгновенный модуль упругости.

Будем предполагать, что $K(t, \tau)$ удовлетворяет условиям 1)—3) теоремы 1, E постоянно, $J(x)$ конечно и отделено от нуля на $[0, l]$ и два из четырех краевых условий (2,2) имеют вид

$$y'(0)=h_1y(0),\quad y'(l)=h_2y(l),\quad 0\leqslant|h_i|\leqslant\infty,\quad i=1,2.$$

Будем говорить, что при данном P краевая задача (2,1), (2,2) *устойчива по Эйлеру с весом* $\alpha(t)$, если существование равномерного по $x\in[0, l]$ конечного предела $L_\alpha p=\lim\limits_{t\to\infty}p(x, t)\alpha(t)$ влечет за собой существование равномерного по $x\in[0, l]$ конечного предела $L_\alpha y=\lim\limits_{t\to\infty}y(x, t)\alpha(t)$.

Будем называть $P_{\langle\alpha(t)\rangle}$ *критическим значением силы* P, соответствующим весу $\alpha(t)$, если при всех $P<P_{\langle\alpha(t)\rangle}$ имеет место устойчивость по Эйлеру с весом $\alpha(t)$, а при $P=P_{\langle\alpha(t)\rangle}$ она уже не имеет места.

Обозначим через $Q(x, \xi, P)$ функцию Грина дифференциального оператора, порождаемого в $C[0, l]$ дифференциальным выражением

$$l_0[y]=\left(-\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ(x)\frac{d^2}{dx^2}-PI\right)\right)y$$

и краевыми условиями (2,2), и положим

$$(Q(P)g)(x)=\int_0^l \frac{\partial^2 Q(x,\xi,P)}{\partial\xi^2} g(\xi)\,d\xi.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество функций $f(t)$, $0\leqslant t<\infty$, принимающих значения из банахова пространства $C[0, l]$ и измеримых и почти всюду ограниченных на каждом конечном интервале полуоси $[0, \infty)$.

Введем в рассмотрение банахово пространство $C\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$ вектор-функций $f(t)\in\mathfrak{M}$, для которых существует предел (1,2), с нормой (1,1), где $|f(t_0)|$ обозначает теперь норму элемента $f(t_0)$ в $C[0, l]$. Будем предполагать, что $p(x, t)\in C\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$.

Лемма. *Для того чтобы краевая задача* (2,1), (2,2) *была устойчива по Эйлеру с весом* $\alpha(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $1/P$ *было регулярной точкой оператора* $Q(P)V$ *в пространстве* $C\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$.

Эта лемма в сочетании с теоремой умножения спектров (теорема 3) из [4], которая вместе с доказательством переносится на оператор $Q(P)V$, позволяет применить к исследованию устойчивости по Эйлеру вязкоупругих стержней тауберовы теоремы типа Пэли — Винера — Гельфанда.

Из теоремы 1 и содержащегося в [5] обобщения тауберовой теоремы И. М. Гельфанда для вольтеррова оператора [1] следует

Теорема 2. a) *Пусть*

$$K(t, \tau)=K_0(t-\tau)+\tilde{K}(t, \tau),$$

причем

1) $\alpha(0)=1, \alpha(t+\tau)\leqslant\alpha(t)\alpha(\tau),\ \theta=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\ln\alpha(t)}{-t}<\infty;$

2) $\displaystyle\int_0^\infty |K_0(t)|\alpha(t)\,dt<\infty;$

3) $\displaystyle T_{K_0}=\lim_{t\to\infty}\int_0^t K_0(t-\tau)\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\,d\tau$ *существует;*

4) $\tilde{K}(t, \tau)$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 1 *и*

$$\lim\sup\int_s^t |\tilde{K}(t, \tau)|\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\,d\tau=0.$$

Тогда для критического значения силы $P_{\langle\alpha(t)\rangle}$ *имеет место оценка*

$$P_{\langle\alpha(t)\rangle}\geqslant P_Э/(1+\varkappa_0),$$

где $P_Э$ — *эйлерова критическая сила для упругой задачи, соответствующей* (2,1), (2,2), *и*

$$\varkappa_0=\max\operatorname{Re}\int_0^\infty K_0(t)e^{-wt}\,dt \quad \textit{при}\ \operatorname{Im}\int_0^\infty K_0(t)e^{-wt}\,dt=0.$$

b) *Пусть*

$$K(t, \tau)=K_0(t, \tau)+\tilde{K}(t, \tau),$$

причем $K_0(t, \tau)$ *удовлетворяет условиям пункта* c) *теоремы* 1, *а* $\tilde{K}(t, \tau)$ — *условию* 4 *пункта* a) *настоящей теоремы.*

Тогда критическое значение $P_{\langle\alpha(t)\rangle}$ *задается формулой*

$$P_{\langle\alpha(t)\rangle}=P_Э/(1+T_{K_0}).$$

c) *Для докритических значений силы P предельный прогиб $(L_\alpha y)(x)$ является решением краевой задачи, получающейся из* (2,1), (2,2) *заменой y на $L_\alpha y$, p — на $L_\alpha p$, вольтеррова оператора V* (1,3) — *оператором умножения на константу T_{K_0}.*

Механическая часть настоящей работы докладывалась на семинаре Г. С. Шапиро по механике и физике материалов и конструкций в Институте проблем механики АН СССР.

Институт горного дела им. А. А. Скочинского
Москва

Поступило
21 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *I. M. Gelfand*, Матем. сборн., т. 9, (51) 51 (1941). [2] *Н. Винер, Р. Пэли*, Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», 1964. [3] *J. D. Hill*, Bull. Am. Math. Soc., v. 42, 1, 225 (1936). [4] *Э. И. Гольденгершель*, Матем. сборн., т. 64, 1, 115 (1964). [5] *Э. И. Гольденгершель*, ДАН, т. 129, № 5, 971 (1959). [6] *Н. Данфорд, Я. Т. Шварц*, Линейные операторы, ч. 1, Общая теория, ИЛ, 1962, стр. 381, упр. 79. [7] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория упругости, «Наука», 1965. [8] *Ю. Н. Работнов*, Ползучесть элементов конструкций, «Наука», 1966. [9] *J. N. Distefano*, J. Struct. Division Proc. Am. Soc. Civil Eng., v. 91, 3, 127 (1965). [10] *З. Б. Цалюк, М. М. Шамсутдинов*, Дифференциальные уравнения, т. 6, 9 (1970). [11] *З. Б. Цалюк*, Дифференциальные уравнения, т. 4, 11, 1967 (1968). [12] *Ф. Э. Гантмахер*, Теория матриц, М., 1953. [13] *Э. И. Гольденгершель*, ДАН, т. 207, № 2, 316 (1972).