

Е. А. НОСИЛОВСКИЙ

О КАНОНИЧЕСКОМ ВИДЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

(Представлено академиком С. М. Никольским 15 I 1974)

Рассматриваются унитарные в индефинитном смысле представления в пространствах Понтрягина Π_n нильпотентной группы G (теория таких пространств изложена в (1)). Для этих представлений не имеет места теорема о полной приводимости, поэтому представляет интерес указать «простейшие» унитарные в Π_n -метрике представления группы G . Из (2) следует, что для изучаемых представлений в Π_n существует неположительное n -мерное инвариантное подпространство H_n . Если H_n не содержит изотропного подпространства, то, обозначая ортогональное дополнение к H_n через Q , имеем $\Pi_n = H_n \oplus Q$, где Q гильбертово, инвариантное.

В случае, если H_m содержит изотропное подпространство, то

$$\Pi_n = (H_m \oplus H_m') \oplus \sum_{i=1}^{n-m} L_i \oplus H, \quad (1)$$

где H_m — максимальное инвариантное изотропное подпространство, H_m' — соответствующее кососвязное, $L_i, i=1, \dots, n-m$, — одномерные отрицательные подпространства, так что

$$H_m^\perp = H_m \oplus \sum_{i=1}^{n-m} L_i \oplus H = \tilde{H}_m \oplus H, \quad \tilde{H}_m = H_m \oplus \sum_{i=1}^{n-m} L_i,$$

\tilde{H}_m инвариантно относительно представления T_g и

$$\begin{aligned} T_g x &= S_g x, & x \in \tilde{H}_m, \\ T_g y &= A_g y + V_g y, & y \in H, \end{aligned} \quad (2)$$

A_g — ограниченный оператор из H в \tilde{H}_m , V_g унитарно в обычном смысле в H , S_g — произвольное конечномерное представление.

Представление в $H_m \oplus H$ вида (2) назовем «зацеплением» представлений S_g и V_g .

Все неприводимые унитарные представления V_g нильпотентной группы G описаны в (3), причем конечномерные неприводимые представления задаются одномерным характером $\alpha(g)$.

Лемма 1. «Зацепление» вида (2), где V_g — бесконечномерное неприводимое представление рассматриваемой группы, всегда разложимо, т. е.

$$H_m^\perp = \tilde{H}_m \oplus H = \tilde{H}'_m \oplus H', \quad T_g \tilde{H}'_m \in \tilde{H}'_m, \quad T_g H' \in H'.$$

Представление S_g в подходящем базисе (см. (4)) приводится к виду

$$S_g = \begin{pmatrix} A_1(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(g) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & A_k(g) \end{pmatrix}, \quad A_\nu(g) = \begin{pmatrix} \alpha_\nu(g) & \dots & a_{1s_\nu}(g) \\ 0 & \alpha_\nu(g) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \alpha_\nu(g) \end{pmatrix},$$

$\tilde{\Pi}_m = \Pi_m^1 \oplus \dots \oplus \Pi_m^k$ — соответствующее разложение в указанном базисе, $\alpha_\nu(g)$, $\nu=1, \dots, k$, — попарно различные характеры группы G . В случае одномерного представления $V_g = \alpha(g)$, не совпадающего ни с каким $\alpha_i(g)$, «зацепление» S_g и V_g разложимо.

Пусть \hat{G} — множество унитарных неприводимых представлений группы G с топологией Фелла (см. (3)) и сужение V_g в (2) описывается в виде прямого интервала неприводимых представлений.

Теорема 1. Пусть S_g совпадает с блоком вида $A_\nu(g)$ и представление V_g таково, что замыкание в \hat{G} его неприводимых компонент $\{V_g^\lambda\}$ не содержит $\alpha_\nu(g)$.

Тогда «зацепление» S_g и V_g разложимо в прямую сумму.

Лемма 2. Пусть S_g и V_g , входящие в соотношение (2), — представления в H_m и H общего вида, тогда $H_m^\perp = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_k$, где Q_i — инвариантные подпространства представления T_g , в каждом из которых метрика вырождена, причем $H_m^i \subset Q_i$, $i=1, \dots, k$.

Лемма 3. Разложению представления T_g в H_m^\perp , указанному в лемме 2, соответствует такое разложение Π_n на инвариантные подпространства

$$\Pi_n = \Pi_{n_1} \oplus \dots \oplus \Pi_{n_k} \quad n_1 + \dots + n_k = n,$$

что

$$Q_i \subset \Pi_{n_i}, \quad i=1, \dots, k.$$

Определение 1. Пусть T_g — представление группы G в Π_n , для которого каждый характер $\alpha_\nu(g)$ (диагональный элемент блока $A_\nu(g)$) имеет окрестность Φ^ν в \hat{G} , не содержащую компонент $\{V_g^\lambda\}$ представления V_g в H .

Имеет место

Теорема 2. Унитарное представление T_g нильпотентной группы Ли G в Π_n разлагается в прямую ортогональную сумму унитарного в гильбертовой метрике представления и конечномерного представления в пространстве типа Π_n с неположительной метрикой.

Замечание. В случае, когда характеры $\alpha_\nu(g)$, $\nu=1, \dots, k$, не унитарны, теоремы 1 и 2 верны без ограничений на представление V_g .

Лемма 4. Пусть диагональные характеры матрицы S_g унитарного неразложимого представления T_g в Π_n совпадают между собой и со всеми V_g^λ разложения $V_g = \{V_g^\lambda\}$ в H (см. (2)); тогда пространство представления Π_n конечномерно.

Определение 2. Обозначим через T_g^i , $i=1, \dots, l$, такое представление в Π_{n_i} ($n_1 + \dots + n_l \leq n$), что соответствующие S_g^i имеют вид блока $A_i(g)$ и $V_g^i = \{V_g^{i,\lambda}\}$ (см. (2), (3)) в пространстве H таковы, что существуют $V_g^{i,\lambda'}$, входящие в любую окрестность в топологии Фелла характера $\alpha_i(g)$.

Тогда справедлива

Теорема 3. Произвольное унитарное представление нильпотентной группы G в пространстве Π_n представимо как прямая ортогональная сумма конечномерных унитарных в индефинитной метрике представлений, а также унитарных (в обычном смысле) и бесконечномерных представлений T_g^i , $i=1, \dots, l$, $l \leq k$, входящих в определение 2.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. С. Иохвидов, М. Г. Крейн, Тр. Московск. Математич. общ., т. 5, 368 (1956).
² М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 27, 1181 (1963). ³ А. А. Кириллов, УМН, т. 17, в. 4 (166) 57 (1962). ⁴ Д. А. Супруненко, Группы матриц, М., 1972.
⁵ М. G. Fell, Trans. Am. Math. Soc., v. 94, № 3, 365 (1960).