Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 2

УДК 62-50 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

В. П. ПЕРОВ

# ОБОБЩЕННЫЙ КРИТЕРИЙ ТОЧНОСТИ И ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

*(Представлено академиком А. А. Вороновым 22 X 1973)*

К основным свойствам линейных систем относятся точность в установившемся режиме при наличии помех, форма и длительность переходного процесса при типовых воздействиях и запас устойчивости. Критерий, характеризующий перечисленные основные свойства для стационарной линейной, одномерной по входу системы, может быть выражен в виде функционала

$$F=\int_0^\infty k^2(\tau)L^2(\tau)\,d\tau+\zeta^2, \qquad (1)$$

где $k(\tau)$ — весовая функция системы, $L(\tau)$ — функция, определяющая ограничение, налагаемое на форму переходного процесса, $\zeta^2=\zeta^2[k(\tau)]$ — функционал, характеризующий точность системы в установившемся режиме.

Функционал

$$\chi=\int_0^\infty k^2(\tau)L^2(\tau)\,d\tau \qquad (2)$$

характеризует скорость убывания $k^2(\tau)$ устойчивой системы и запас устойчивости. Выбор в качестве $L^2(\tau)$ возрастающей функции позволяет наложить на $k^2(\tau)$ требование асимптотического убывания более быстрого, чем убывание $L^{-2}(\tau)$. Ограниченность $\chi$ обеспечивает запас устойчивости не меньший, чем в устойчивой системе с весовой функцией $L^{-1}(\tau)$. Последнее следует из критерия устойчивости

$$\int_0^\infty |k(\tau)|\,d\tau<\infty. \qquad (3)$$

Действительно, если $\chi[k(\tau)]<\infty$, то $k^2(\tau)$ не может принимать значение $\infty$ на конечных интервалах изменения $\tau$ в связи с ограниченностью на этих интервалах функции $L^{-2}(\tau)$, являющейся следствием предполагаемой устойчивости $L^{-1}(\tau)$. С другой стороны, если $\chi[k(\tau)]<$ $<\infty$, то $k^2(\tau)/L^{-2}(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$, т. е. $|k(\tau)|/|L^{-1}(\tau)|\to 0$, и, следовательно, запас устойчивости системы с весовой функцией $k(\tau)$ в смысле критерия (3) больше, чем запас устойчивости системы с весовой функцией $L^{-1}(\tau)$. Заметим, что запас устойчивости в смысле критерия (3) выражает запас по скорости сходимости к нулю подынтегральной функции $|k(\tau)|$.

Таким образом, критерий $F$ характеризует одновременно точность системы в установившемся режиме при наличии помех, скорость убывания весовой функции по сравнению с убыванием некоторой заданной функции и запас устойчивости. В этом смысле его можно назвать о б о б щ е н н ы м.

Сформулированный критерий можно успешно использовать, например, при синтезе оптимальных линейных систем. Если считать, что $\xi^2$ — средний квадрат ошибки воспроизведения входного сигнала в установившемся режиме, то условие минимума $F$ находится точно так же, как известное условие минимума $\xi^2$, и выражается следующим интегральным уравнением:

$$k(\tau)L^2(\tau)+\int_0^\infty R_{\varphi\varphi}(\tau-\lambda)k(\lambda)\,d\lambda=R_{u\varphi}(\tau)+\sum_{i=0}^{r}\gamma_i\eta_i(\tau), \qquad (4)$$

где $R_{\varphi\varphi}(\tau)$ — корреляционная функция стационарной случайной части входного процесса $\varphi(t)$, $R_{u\varphi}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция между $\varphi(t-\tau)$ и случайной составляющей сигнала $u(t)$, $\eta_i(\tau)$ — система базисных функций, с помощью которых регулярная часть сигнала $s(\tau)$ выражается в виде суммы

$$s(\tau)=\sum_{i=0}^{r}s_i\eta_i(\tau);$$

$s_i$ — случайные или заданные коэффициенты, $\gamma_i$ — коэффициенты, определяемые из дополнительного условия несмещенности оценки $s(\tau)$, записываемого следующим образом:

$$\int_0^\infty\sum_{i=0}^{r}s_i\eta_i(t-\tau)k(\tau)\,d\tau=\sum_{i=0}^{r}s_i\eta_i(t).$$

Решение уравнений (4) существенно зависит от выбора $L^2(\tau)$. Непрерывность $L^2(\tau)$ упрощает реализуемость решений. Память синтезируемой системы предопределяется интервалом изменения $\tau$, на котором $L^2(\tau)$ имеет малые значения. Достаточно быстрое последующее возрастание $L^2(\tau)$ обеспечивает требуемую скорость затухания переходного процесса.

Можно, например, принять

$$L^2(\tau)=c^2\left[e^{\alpha\tau}\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{\alpha^i\tau^i}{i!}\right)^{-1}-1\right],$$

где $m$ — число удерживаемых членов разложения $e^{\alpha\tau}$ в степенной ряд, $c^2$ — масштабный множитель.

При $m=0$, $R_{u\varphi}=0$, $R_{\varphi\varphi}(\tau)=c^2\delta(\tau)$ для полиномиального сигнала $[\eta_i(\tau)=\tau^i]$ решение уравнения (4) имеет вид:

$$k(\tau)=e^{-\alpha\tau}\sum_{n=0}^{r}(-1)^n\frac{\alpha^{n+1}}{n!}C_{r+1}^{n+1}\tau^n, \quad 0\leqslant\tau<\infty,$$

$$k(p)=\int_0^\infty k(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau=\sum_{n=0}^{r}(-1)^nC_{r+1}^{n+1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+p}\right)^{n+1}.$$

Для гармонического сигнала

$$s(t)=A\cos(\omega t+\psi)=\frac{Ae^{i\psi}}{2}e^{i\omega t}+\frac{Ae^{-i\psi}}{2}e^{-i\omega t};$$

полагая $\eta_0(t)=e^{i\omega t}$, $\eta_1(t)=e^{-i\omega t}$, $\eta_n(t)=0$, $n>1$, находим следующее решение уравнения (4):

$$k(\tau)=e^{-\alpha\tau}\alpha\left(2\cos\omega\tau-\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega\tau\right),\quad 0\leqslant\tau<\infty,$$

$$k(p)=\frac{\alpha(\alpha+2p)}{(\alpha+p)^2+\omega^2}.$$

Полученные оптимальные передаточные функции дробно-рациональны и легко реализуемы в виде разомкнутых либо замкнутых систем. В этом заключается основное достоинство использования сформулированного критерия в задачах синтеза по сравнению с обычными статистическими критериями. Некоторое достоинство имеется также в смысле процедуры синтеза оптимальных характеристик, так как условие оптимума получается в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода, задача решения которого корректна по Адамару.

Автор выражает благодарность акад. А. А. Воронову за полезные замечания.

Поступило
29 I 1973