Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 2

УДК 530.12:531.51

ФИЗИКА

Н. М. ПЕТРОВА, И. В. САНДИНА

ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

(Представлено академиком В. А. Фоком 18 IX 1973)

Энергию гравитационного излучения находят обычно, вычисляя поток энергии, уходящей на бесконечность, так же как это делается в электродинамике. Однако в теории гравитации решение этого вопроса осложняется тем, что при нахождении потока приходится пользоваться не тензором, а псевдотензором. Кроме того предложено несколько видов псевдотензоров, и неизвестно, каким из них следует пользоваться при нахождении потока гравитационной энергии.

Поэтому представляется интересным найти энергию гравитационного излучения непосредственно из уравнений движения тел, исследуя их на консервативность. Для этой цели находятся уравнения движения для системы двух сферически симметричных протяженных тел в гармонической системе координат методом последовательных приближений В. А. Фока [1].

Уравнения движения могут быть определены из условия

$$\nabla_\alpha T^{i\alpha}=0. \tag{1}$$

Уравнение (1) в нужном для решения поставленной задачи приближении может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T^{0i}}{\partial t}+\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}-\frac{\partial U}{\partial x_i}T^{00}+\frac{1}{c^2}\left\{\left[4-\frac{\partial U_i}{\partial t}-\frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}-\frac{\partial S}{\partial x_i}+8U\frac{\partial U}{\partial x_i}\right]T^{00}+\right.\\
&\quad\left.+\left[4\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i}-\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)+4\delta_{ik}\frac{\partial U}{\partial t}\right]T^{0k}-\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta_{kl}T^{kl}+4\frac{\partial U}{\partial x_k}T^{ik}\right\}+\\
&\quad+\frac{1}{c^4}\left\{\left[-4\frac{\partial S_i}{\partial t}-8U_k\frac{\partial U_k}{\partial x_i}+8S\frac{\partial U}{\partial x_i}+16U\frac{\partial U_i}{\partial t}-48U^2\frac{\partial U}{\partial x_i}+\right.\right.\\
&\quad\left.+8U\frac{\partial S}{\partial x_i}+4S_{ik}\frac{\partial U}{\partial x_k}+4U_i\frac{\partial U}{\partial t}+4U\frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}\right]T^{00}+\\
&\quad+\left[4\frac{\partial S_{ik}}{\partial t}8U_k\frac{\partial U}{\partial x_i}+4\left(\frac{\partial S_k}{\partial x_i}-\frac{\partial S_i}{\partial x_k}\right)+16U\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)\right]T^{0k}+\\
&\quad+\left[4\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_l}-2\frac{\partial S_{kl}}{\partial x_i}+\left(4U\frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{\partial S}{\partial x_i}+\frac{\partial S_{nn}}{\partial x_i}\right)\delta_{kl}\right]T^{kl}+\\
&\quad+\left[4\frac{\partial S}{\partial t}-4\frac{\partial S_{kk}}{\partial t}-16U\frac{\partial U}{\partial t}\right]T^{0i}+\\
&\quad\left.+\left[4\frac{\partial S}{\partial x_k}-4\frac{\partial S_{nn}}{\partial x_k}-16U\frac{\partial U}{\partial x_k}\right]T^{ik}\right\}=0;
\end{aligned} \tag{2}$$

здесь U, U_i, S_i, S_{ik}, S — функции, входящие в разложение величин

$$G^{\alpha\beta}=(-g)^{1/2}g^{\alpha\beta}$$

в ряд по обратным степеням скорости света:

$$
\begin{aligned}
G^{00} &= c^{-1} + 4Uc^{-3} + 4Sc^{-5} + \dots \\
G^{0i} &= \qquad 4U_i c^{-3} + 4S_i c^{-5} + \dots \\
G^{ik} &= -c\delta_{ik} + 4S_{ik} c^{-3} + \dots
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Эти функции определяются из уравнений тяготения. Как показывает расчет, уравнения для них имеют вид уравнения Даламбера

$$\Box \Psi = -4\pi\sigma.$$

Решением их будут функции

$$\Psi = \int \frac{\sigma(\gamma', t - |\gamma - \gamma'|/c)}{|\gamma - \gamma'|} dv'$$

или приближенно после разложения в ряд по запаздывающему времени получим

$$
\begin{aligned}
\Psi(\gamma, t) = &\int \frac{\sigma(\gamma', t)}{|\gamma - \gamma'|} dv' - \frac{1}{1!c} \frac{\partial}{\partial t} \int \sigma(t\gamma') dv' + \\
&+ \frac{1}{2!c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \sigma(t, \gamma') |\gamma - \gamma'| dv' - \frac{1}{3!c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int \sigma(t, \gamma') |\gamma - \gamma'|^2 dv' + \\
&+ \frac{1}{4!c^4} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \int \sigma(t, \gamma') |\gamma - \gamma'|^3 dv' - \frac{1}{5!c^5} \frac{\partial^5}{\partial t^5} \int \sigma(t, \gamma') |\gamma - \gamma'|^4 dv' + \dots
\end{aligned}
$$

Таким образом, поправки на запаздывание к функциям U, U_i, U, S_i, S_{ik} автоматически введут в уравнение (2) нечетные степени c^{-1}, хотя разложение (3), на первый взгляд, как будто предполагает наличие в уравнениях движения только четных степеней c^{-1}.

После подстановки в (2) найденных потенциалов и интегрирования по объему тела «a», будем иметь

$$m_a \ddot{a}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} + \frac{1}{c^2} \underset{2}{F}{}_i^{(a)} + \frac{1}{c^4} \underset{4}{F}{}_i^{(a)} + \frac{1}{c^5} \underset{5}{F}{}_i^{(a)} + \dots \tag{4}$$

Член с c^{-3} в уравнениях движения уничтожается.

Для исследования консервативности систем умножим уравнение (4) скалярно на $\mathbf{v}_a$ и сложим с аналогичным выражением для тела «b».

Если в уравнении (4) ограничиться членом $\frac{1}{c^4} \underset{4}{F}{}_i^{(a)}$, то можно найти интеграл энергии:

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} \left\{ {}^1/_2 m_a v_a^2 + {}^1/_2 m_b v_b^2 + \Phi + \frac{1}{c^2} E_2 + \frac{1}{c^4} E_4 \right\} = 0. \tag{5}$$

Вычисления показывают, что

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E = -\frac{\gamma}{c^5} \frac{\mu^{*2}}{5} \{ {}^2/_3 (\dddot{\gamma}\gamma)^2 + 6(\ddot{\gamma}\dot{\gamma})^2 + 2(\dddot{\gamma})^2 (\gamma)^2 + 18(\ddot{\gamma})^2 (\dot{\gamma})^2 - \\
- 8(\ddot{\gamma}\dot{\gamma})(\dddot{\gamma}\gamma) + 12(\dddot{\gamma}\ddot{\gamma})(\dot{\gamma}\gamma) + 12(\dddot{\gamma}\dot{\gamma})(\ddot{\gamma}\gamma) \},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где E включает уже поправку пятого порядка E_5.

Тогда вместо уравнения (5) будем иметь

$$-\frac{d}{dt}E=\mathcal{U}_s. \qquad (7)$$

Очевидно, $\mathcal{U}_s$ следует толковать как энергию излучения. После снижения порядка производных получим выражение

$$\mathcal{U}_s=\frac{\gamma}{5c^5}\mu^{\cdot 2}\{32(\ddot{\gamma})^2(\dot{\gamma})^2-{}^{88}/_3(\ddot{\gamma}\dot{\gamma})^2\}; \qquad (8)$$

$\mathcal{U}_s$ есть величина положительная.

В. А. Фок [1], исследуя поток энергии, уходящей на бесконечность, получил

$$\mathcal{U}_s=\frac{\gamma}{5c^5}(D_{ik}-{}^1/_3\delta_{ik}D_{ll})^2. \qquad (9)$$

Легко убедиться, что после раскрытия величин D_{ik} выражение (9) совпадет с найденной нами величиной (8).

Энергия излучения находилась из уравнений движения в работах [4–6], где использовались те или иные модификации метода Эйнштейна — Инфельда — Гоффмана. Однако результаты работ разноречивы: выражения для энергии излучения имеют различные виды, зачастую они носят или оценочный характер, или вычисляются для некоторых специальных видов движения.

В нашей работе эта задача решена в общем виде при строгом использовании метода последовательных приближений.

Казахский педагогический институт
им. Абая
Алма-Ата

Поступило
5 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. А. Фок*, Теория пространства, времени и тяготения, 1961. [2] *Н. М. Петрова*, Физика, Сборн. тр. аспирантов и соискателей, Алма-Ата, 1968. [3] *Н. М. Петрова*, *И. В. Сандина* там же, 1970. [4] *N. Hu*, Proc. Roy. Irish. Acad., v. A51, 87 (1947). [5] *A. Peres*, Nuovo Cimento, v. 13, 439 (1959); v. 11, 617 (1959); v. 15, 351 (1960). [6] *M. Carmeli*, Ann. Phys. U.S.A., v. 34, 465 (1965); Phys. Rev., v. 138, 1003 (1965); v. 140, 1441 (1965).