Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 4

УДК 519.217 *МАТЕМАТИКА*

М. В. МЕНЬШИКОВ

УСЛОВИЯ ЭРГОДИЧНОСТИ И ТРАНЗИЕНТНОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ В ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ОКТАНТЕ ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 I 1974)

В настоящей статье исследуется дискретное случайное блуждание в положительном октанте пространства в предположении однородности соответственно внутри октанта, на каждой из граней и на осях. Получены необходимые и достаточные условия эргодичности и транзиентности на открытом всюду плотном множестве в пространстве параметров. Точнее, за исключением некоторых особых гиперповерхностей, где блуждание, по-видимому, является нулевым возвратным, эти случаи не могут быть рассмотрены подобными методами. Аналогичная ситуация имеет место и для блуждания Z^2_{++} [1].

При решении задачи обобщается метод построения «почти линейных» полумартингалов, изложенный в работе [1], а также используются более тонкие критерии эргодичности и транзиентности для цепей Маркова.

1. Критерии для цепей Маркова. Рассмотрим однородную цепь Маркова L с дискретным временем, счетным множеством состояний A, являющимся подмножеством эвклидова пространства R^n, и переходными вероятностями $P_{\alpha\beta}$. Будем предполагать, что цепь Маркова L имеет один существенный класс состояний. Через $P_{\alpha\beta}{}^n$ будем обозначать вероятность перехода из состояния α в состояние β за n шагов.

Предположим, что на A задана вещественная функция $f=\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ такая, что $f_\alpha>c_1$ для некоторого $c_1>-\infty$ и всех α, и для некоторого $d>0$ из выполнения условия $|f_\beta-f_\alpha|>d$ следует, что $P_{\alpha\beta}=0$. Пусть на A также задана целочисленная, ограниченная, положительная функция $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$, причем

$$\sup_{\alpha\in A} K_\alpha=b<\infty. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть f_α удовлетворяет неравенствам*

$$M_{K_\alpha}(\alpha)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_\beta P^{K_\alpha}_{\alpha\beta}[f_\beta-f_\alpha]\leqslant-\varepsilon \tag{2}$$

для некоторого $\varepsilon>0$ и для всех α таких, что $f_\alpha>c_2>c_1$, а множество A_1 α таких, что $c_2>f_\alpha>c_1$, конечно и не пусто.

Тогда цепь L эргодична *.

Видно, что при $K_\alpha=1$ лемма 1 превращается в известное условие эргодичности, принадлежащее Фостеру.

Лемма 2. *Пусть сохраняются предположения леммы 1, кроме неравенства (2), которое заменяется следующим:*

$$M_{K_\alpha}(\alpha)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_\beta P^{K_\alpha}_{\alpha\beta}[f_\beta-f_\alpha]\geqslant 0. \tag{3}$$

* Ненулевые возвратные периодические цепи считаются эргодическими.

Тогда цепь L не эргодична. Требование конечности множества A_1 не обязательно.

Лемма 3. *Пусть сохраняются все предположения леммы 2, кроме неравенства* (3), *которое заменяется более сильным для некоторого* $\varepsilon>0$:

$$M_{K_\alpha}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\beta P_{\alpha\beta}^{K_\alpha}[f_\beta - f_\alpha] \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Тогда цепь L транзиентна.

2. Обобщение принципа локальной ε-линейности. Пусть множество состояний A цепи L есть подмножество эвклидова пространства R^n, а f_α индуцирована некоторой функцией $f(x)$, определенной на R^n. Обозначим через D_ε^- множество $\{x\colon f(x)<\varepsilon,\ x\in R^n\}$. Аналогично, пусть $D_\varepsilon^+=\{x\colon f(x)>\varepsilon,\ x\in R^n\}$. Пусть на A задана целочисленная, положительная функция $K(\alpha)=K_\alpha$, причем, $\sup\limits_{\alpha\in A} K_\alpha=b<\infty$. Кроме того, пусть длины скачков за один шаг ограничены некоторым числом d.

Если функция $f(x)$ линейна, то условия (2) и (4) выполнены для некоторого $\varepsilon=\varepsilon(\alpha)$ тогда и только тогда, когда вектор среднего скачка за K_α шагов (обозначаемый далее $\mathbf{M}_{K_\alpha}(\alpha)$), отложенный из α, направлен соответственно в сторону $D^-_{f(\alpha)}$ или $D^+_{f(\alpha)}$.

Лемма 4. *Если конец вектора среднего скачка за K_α шагов, отложенного из α, принадлежит множеству $D^-_{f(\alpha)-5\varepsilon}$ и выполняется условие*

$$\inf_{\varphi} \sup_{\substack{\tilde\alpha\in R^n\\ \|\tilde\alpha-\alpha\|\leqslant dK_\alpha}} |f(\tilde\alpha)-\varphi(\tilde\alpha)|<\varepsilon, \tag{5}$$

где inf *берется по всем линейным функциям* φ, *то условие* (2) *выполняется.*

Если конец вектора среднего скачка за K_α шагов, отложенного из α, принадлежит множеству $D^+_{f(\alpha)+5\varepsilon}$ и выполняется (5), *то выполняется также и условие* (4).

Утверждение леммы 4 будем называть принципом ε-линейности. Таким образом, при построении функции f можно попытаться строить ее линии уровня склеиванием локально ε-линейных кусков.

3. Основной результат. Рассмотрим однородную цепь Маркова L с дискретным временем: множеством состояний которой является множество $Z_+^3=\{i, j, k\colon i, j, k\geqslant 0$ целые$\}$. Точка блуждает по этой решетке.

Введем обозначения: Z_1, Z_2, Z_3 — ортогональные оси в R^3, $P_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta\in Z_+^3$) — вероятность перехода из точки α в точку β за один шаг; $\mathbf{M}(z)=(M_1(z), M_2(z), M_3(z))$ — вектор среднего скачка за один шаг из точки $z\in Z_+^3$ с компонентами вдоль осей Z_1, Z_2, Z_3 соответственно.

Будем предполагать, что длины скачков за один шаг равномерно ограничены, т. е. существует такое d, что $P_{\alpha\beta}=0$ для всех $\alpha, \beta\in Z_+^3$ при $\|\alpha-\beta\|>d$.

Будем предполагать однородность блужданий соответственно внутри октанта пространства, на гранях и на осях, т. е. переходные вероятности $P_{\alpha\beta}=P(i, j, k)(i', j', k')$ зависят только от разностей $i-i'$, $j-j'$, $k-k'$ и от принадлежности точки α внутренности октанта, одной из граней или одной из осей.

При этом предположении можно ввести следующие обозначения:

$$\mathbf{M}(z)=\mathbf{M}(z_1,z_2,z_3)=$$
$$=\begin{cases} \mathbf{M}=(M_1,M_2,M_3), & \text{если } z_j\geqslant 1,\ j=1,2,3;\\ \mathbf{M}^{(i_1)}=(M_1^{(i_1)},M_2^{(i_1)},M_3^{(i_1)}), & \text{если } z_{i_1}=0,\ z_j\geqslant 1,\ j\neq i_1;\\ \mathbf{M}^{(i_1i_2)}=(M_1^{(i_1i_2)},M_2^{(i_1i_2)},M_3^{(i_1i_2)}), & \text{если } z_{i_1}=0,\ z_{i_2}=0,\ z_{i_3}\geqslant 1.\end{cases} \qquad (6)$$

В этой записи $(i_1,\ i_2,\ i_3)$ обозначают неравные между собой индексы из $(1,2,3)$.

Далее обозначим

$$D_{i_1i_2}=M_{i_1}^{(i_1)}\cdot M_{i_2}-M_{i_2}^{(i_1)}\cdot M_{i_1}.$$

Проведем перпендикулярно оси Z_1 через точку $(N,\ 0,\ 0)$ плоскость C_1 $(N>d)$ и будем рассматривать на ней случайное блуждание L_1, индуцированное описанным выше блужданием, т. е. вероятности перехода $P_{\alpha\beta}^{*1}$ цепи L_1 равны

$$P_{\alpha\beta}^{*1}=P_{(i,j)(k,l)}^{*1}=\sum_{m=-d}^{+d}P_{(N,i,j)(N+m,k,l)}. \qquad (7)$$

Ясно, что L_1 не зависит от N.

Аналогично рассмотрим случайные блуждания L_2 и L_3, индуцированные цепью Маркова L на плоскостях C_2 и C_3, перпендикулярных осям Z_2 и Z_3 соответственно.

Пусть цепь Маркова L_i эргодична и существуют стационарные вероятности $\pi^i(\alpha)=\pi^i(j,\ k)$. Введем

$$W_i\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{\alpha}\pi^i(\alpha)M_i(\alpha)=\sum_{j,k}\pi^i(j,k)M_i(j,k), \qquad (8)$$

где $M_i(\alpha)=M_i(j,\ k)$ есть i-я координата вектора среднего скачка за один шаг из точки, принадлежащей плоскости C_i. Так как $M_i(\alpha)<d$ для любого $\alpha\in Z_+^3$, то $|W_i|<\infty$, а из однородности блуждания L сумма, стоящая в правой части равенства (8), свертывается до 4 членов.

Кроме однородности случайного блуждания L и ограничения на скачки за один шаг, будем предполагать, что все состояния нашей цепи Маркова сообщаются между собой, введенные выше величины $D_{i_1i_2}$ и W_i не равны нулю при любых i_1 и i_2, а величина $|D_{12}D_{23}D_{31}/(D_{13}D_{21}D_{32})|\neq 1$. Эти предположения выделяют в конечномерном пространстве параметров $\{P_{\alpha\beta}\}_{\|\alpha-\beta\|\leqslant d}$ открытое всюду плотное множество Ω. Следующая теорема показывает, что Ω разбивается на два непересекающихся подмножества $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, в которых случайное блуждание соответственно эргодично или транзиентно.

Т е о р е м а. *Пусть выполняются следующие три условия:*

1) *существует такое* i_1, *что* $M_{i_1}<0$;

2) *для каждого* i_1, *при котором* $M_{i_1}<0$, *существует такое* i_2, *что* $D_{i_1i_2}<0$;

3) *выполняется одно из следующих двух условий:*

3а) *существует такое* i_1, *при котором* L_{i_1} *эргодична, и для любого* i_1, *при котором* L_{i_1} *эргодична,* $W_{i_1}<0$;

3б) L_1, L_2, L_3 *не эргодичны. Тогда, если* $D_{12}>0$, *то*

$$\left|\frac{D_{12}D_{23}D_{31}}{D_{13}D_{21}D_{32}}\right|<1,$$

а если $D_{12}<0$, *то*

$$\left|\frac{D_{12}D_{23}D_{31}}{D_{13}D_{21}D_{32}}\right|>1$$

Тогда блуждание L эргодично.

В противном случае, если не выполнено хотя бы одно из перечисленных условий, случайное блуждание L транзиентно.

Таким образом, исследование эргодичности и транзиентности трехмерного случайного блуждания сводится к вычислению некоторых характеристик двумерного блуждания. Используя аналитический метод, изложенный в работе ([2]), можно получить в явном виде условия эргодичности и транзиентности для большого класса блужданий в положительном октанте пространства

Картина, по-видимому, будет сохраняться и для подобных блужданий в Z_+^n.

В заключение выражаю благодарность В. А. Малышеву за помощь в постановке задачи и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. А. Малышев*, ДАН, т. 202, № 3 (1972). [2] *В. А. Малышев*, Случайные блуждания, Уравнения Винера – Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа, М., 1970.