

УДК 518:517.948

МАТЕМАТИКА

В. В. ВОРОНИН, В. А. ЦЕЦОХО

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ I РОДА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 24 XII 1973)

Рассмотрим уравнение

$$(A\mu)(x) = \int_{\Gamma} K(x, y) \mu(y) dS_y = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

где Γ — гладкая простая замкнутая кривая на плоскости, а ядро представимо в виде

$$K(x, y) = \ln(d/|x-y|) + K_1(x, y);$$

здесь d — константа, x, y — точки плоскости, $|x-y|$ — эвклидово расстояние, а ядро K_1 гладкое по обоим переменным. Условия гладкости далее будут уточнены.

Через $C^r, C^{r, \alpha}$ будем обозначать банаховы пространства с нормами

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_r &= \max_t |\varphi(t)| + \max_t |\varphi^{(r)}(t)|; \\ \|\varphi\|_{r, \alpha} &= \max_t |\varphi(t)| + \sup_{t, \delta > 0} \frac{|\varphi^{(r)}(t+\delta) - \varphi^{(r)}(t)|}{\delta^\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

Буквой c обозначаем различные положительные константы.

Если $y=y(\tau)$, $\tau \in [-\pi, \pi]$, — параметризации Γ , то, сохранив прежние обозначения для A, K, f и положив $\lambda(\tau) = \mu(y(\tau)) \cdot |dy/d\tau|$, перепишем (1) в виде

$$(A\lambda)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t, \tau) \lambda(\tau) d\tau = f(t). \quad (3)$$

Все функции считаем периодически продолженными.

Предлагается следующий метод решения. Пусть $t_j = jh$, $h = 2\pi/(2n+1)$, $j = -n, \dots, n$; $\varphi_k(\tau)$, $k = -n, \dots, n$, — базисные функции интерполяции, т. е. $\varphi_k(t_j) = \delta_{kj}$. Будем считать, что φ_0 — функция четная, $\varphi_k(\tau) = \varphi_0(\tau - t_k)$ и при некотором $p \geq 2$ выполнены условия

$$\max_{\tau} \left| \left[f(\tau) - \sum_{j=-n}^n f(t_j) \varphi_j(\tau) \right]^{(r)} \right| \leq L_r h^{p-r} \|f^{(p)}\|_0, \quad r \leq p-1, \quad (4)$$

$$L_0 \leq 1/2, \quad L_{p-1} \leq 1. \quad (5)$$

Приближенное решение ищем в виде

$$\bar{\lambda}(\tau) = \sum_{j=-n}^n \lambda_j \varphi_j(\tau),$$

а неизвестные значения λ_j определяем из условий коллокации

$$(A\bar{\lambda})(t_k) = f(t_k), \quad k = -n, \dots, n. \quad (6)$$

Это равносильно интерполированию правой части с помощью системы функций $\psi_j = A\varphi_j$ по значениям в узлах сетки $\{t_j\}$. В частном случае, когда $K_1(x, y) = 0$, известно (см., например, ⁽¹⁾), что для всех значений d , кроме одного (зависящего от γ), оператор A непрерывно обратим из $C^{r+1, \alpha}$ в $C^{r, \alpha}$ для всех $\alpha \in (0, 1)$, целых r . Тогда функции ψ_j линейно независимы, но будут ли независимы их сужения на сетку и, значит, будет ли система (6) разрешима относительно λ_j ? Теоремы 1–3 дают положительный ответ и позволяют оценить сходимость приближенного решения к точному как в упомянутом частном, так и в общем случае.

Сначала рассмотрим специальный случай, когда $K_1(x, y) = 0$ и γ — единичная окрестность. Уравнение (3) тогда примет вид

$$(A_0 \lambda)(t) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left(d \left| 2 \sin \frac{t-\tau}{2} \right| \right) \lambda(\tau) d\tau = f(t). \quad (7)$$

Теорема 1. Если $d \neq 1$, система (6) для оператора A_0 разрешима относительно λ_j .

Поскольку, согласно формулам Гильберта, функции $1, \cos kt, \sin kt$ являются собственными для оператора A_0 с собственными числами $2\pi \ln d, 2\pi/k, 2\pi/k$, то для доказательства достаточно проинтерполировать $\cos kt$ и $\sin kt, k=1, \dots, n$, с помощью системы φ_j ; полученные функции $u_k(\tau), v_k(\tau)$ разложить в ряд Фурье и применить A_0 . Оказывается, что сужения их образов $\bar{u}_k(t)$ и $\bar{v}_k(t)$ на сетку имеют вид

$$\bar{u}_k(t_j) = r_k \cos kt_j, \quad \bar{v}_k(t_j) = r_k \sin kt_j, \quad (8)$$

где $r_k > ck^{-1} > 0$ из условий (4), (5) и, значит, являются векторами, ортогональными один к другому и к сужению $A_0(1)$ на сетку $\{t_j\}$.

Обозначим через π_h оператор интерполирования функциями $1, \bar{u}_k, \bar{v}_k, k=1, \dots, n$. Если

$$u_h(f, t) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

тригонометрический интерполяционный многочлен функции f , то, ввиду (8), коэффициенты при $\bar{u}_k, \bar{v}_k$ будут отличаться от A_k и B_k лишь множителем $1/r_k$. Известно (см. ⁽²⁾), что

$$|f^{(s)}(t) - u_h^{(s)}(f, t)| \leq c \ln n \cdot n^{-r+s} \cdot \max_t |f^{(r)}(t)|, \quad s \leq r-1. \quad (9)$$

Оценку $(u_h(f, t) - \pi_h f(t))$ нетрудно провести непосредственно. Поэтому для функции $\pi_h f - f$, которая является невязкой нашего приближенного решения, верны следующие оценки.

Теорема 2. Если $f \in C^r$, то при достаточно больших n

$$\|\pi_h f - f\|_0 \leq c \|f\|_{r, \gamma_{r,p}}(h), \quad (10)$$

$$\|\pi_h f - f\|_{1, \alpha} \leq c \|f\|_{r, \gamma_{r,p}}(h) \cdot h^{-1-\alpha},$$

где $\gamma_{r,p}(h) = h^{r-1}, h^{p+1} |\ln h|$ и h^{p+1} соответственно при $r \leq p+1, r = p+2$ и $r > p+2$.

Замечание 1. Если f имеет кусочно-непрерывную производную порядка r , то оценки (10) при $r \leq p+1$ ухудшаются на $|\ln h|$, в других случаях остаются прежними. Условия (4), (5) используются для оценки коэффициентов Фурье функций $\bar{u}_k, \bar{v}_k$, а гладкость f для оценки A_k, B_k .

Обратимся к общему случаю: интегральный оператор, представимый в виде $A = A_0 + A_1$, где A_0 задан формулой (7), а A_1 — оператор с гладким ядром $\bar{K}(t, \tau)$.

Теорема 3. Пусть оператор A непрерывно обратим из $C^{1, \alpha}$ в $C^{0, \alpha}$, ядро $\bar{K}(t, \tau)$ имеет производную порядка r по t непрерывную по обоим переменным, и $f \in C^r$, $r \geq 3$.

Тогда при достаточно большом n система (6) разрешима относительно λ_j и для невязки полученного приближенного решения выполнены оценки (10).

Действительно, пусть X_h — подпространство $C^{0, \alpha}$ натянутое на $\{\varphi_j\}$. Мы ищем в X_h функцию $\bar{\lambda}$ из условий (6), т. е.

$$\pi_h(A_0 + A_1)\bar{\lambda} = \pi_h f. \quad (11)$$

На X_h имеем $\pi_h A_0 = A_0$. Из условий теоремы следует, что A_1 непрерывен из $C^{0, \alpha}$ в C^r . Пользуясь (10), заключаем, что

$$\begin{aligned} \|\pi_h(A_0 + A_1)\bar{\lambda} - (A_0 + A_1)\bar{\lambda}\|_{1, \alpha} &= \|(\pi_h - E)A_1\bar{\lambda}\|_{1, \alpha} \leq \\ &\leq c\gamma_{r, p}(h)h^{-1-\alpha}\|\bar{\lambda}\|_{0, \alpha} = o(1)\|\bar{\lambda}\|_{0, \alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку $A_0 + A_1$ обратим на X_h непрерывно в нормах $C^{1, \alpha}$ и $C^{0, \alpha}$, то это же верно для $\pi_h(A_0 + A_1)$, причем из (10) и (11) видим, что

$$\|\bar{\lambda}\|_{0, \alpha} \leq c\|f\|_r. \quad (13)$$

Оценка для невязки получается из (10) — (13):

$$\begin{aligned} \|(A_0 + A_1)\bar{\lambda} - f\|_{1, \alpha} &\leq \|\pi_h(A_0 + A_1)\bar{\lambda} - f\|_{1, \alpha} + \|(A_1 - \pi_h A_1)\bar{\lambda}\|_{1, \alpha} \leq \\ &\leq \|\pi_h f - f\|_{1, \alpha} + \|(E - \pi_h)A_1\bar{\lambda}\|_{1, \alpha} \leq c\gamma_{r, p}(h)h^{-1-\alpha}\|f\|_r. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. Условия (4), (5) выполняются для кусочно-полиномиальной интерполяции, точной для полиномов степени $\leq p-1$, например, для интерполяции трапециями ($p=2$).

З а м е ч а н и е 3. Представим коэффициенты системы (6) в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(t_k, \tau) \varphi_j(\tau) d\tau = \int_{t_k-\pi}^{t_k+\pi} \ln(d/|t_k-\tau|) \varphi_j(\tau) d\tau + \int_{-\pi}^{\pi} \bar{K}(t_k, \tau) \varphi_j(\tau) d\tau.$$

Если φ_j — кусочно-полиномиальная функция, то первый интеграл вычисляется точно. Применим ко второму квадратурную формулу. Это равносильно возмущению оператора A_1 теоремы 3. Тогда $\|(A_1 - \bar{A}_1)\bar{\lambda}\|_r$ убывает как погрешность квадратурной формулы (по τ) для $\partial^r/\partial t^r \bar{K}(t, \tau)\bar{\lambda}(\tau)$. Дополнительное слагаемое $\|\pi_h(\bar{A}_1 - A_1)\bar{\lambda}\|_{1, \alpha}$ в оценке (28) убывает с той же скоростью.

З а м е ч а н и е 4. Если вместо f задана f_0 такая, что $\|f - f_0\|_{L_2} \leq \delta$, то, предполагая, что $\|f\|_{r_1} \leq M$, где $r_1 > r$, можно произвольным образом сгладить f_0 в классе C^{r_1} , т. е. взять любую $f_1 \in C^{r_1}$ такую, что $\|f_1 - f_0\|_{L_2} \leq \delta$ и $\|f_1\|_{r_1} \leq M$. Тогда

$$\|f - f_1\|_r \leq cM^{(2r+1)/2r_1} \delta^{(2r_1-2r-1)/2r_1},$$

и уравнение можно решать с правой частью f_1 описанным методом.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
12 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968.
- ² В. В. Иванов, Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, Киев, 1968.