Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 6

УДК 519.4:517:513.88 *МАТЕМАТИКА*

Э. В. КИССИН

C^*-АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ И ВЗВЕШЕННЫМИ СДВИГАМИ

(Представлено академиком С. М. Никольским 14 I 1974)

Пусть B — такая C^*-алгебра с единицей, что в ней есть коммутативная под-C^*-алгебра с единицей D и унитарный элемент u такие, что $u^*au\in D$ для любого $a\in D$ и конечные линейные комбинации $\sum\limits_{i=k}^{n} a_iu^i$, где $a_i\in D$, $-\infty<k\leqslant n<\infty$, плотны в B.

C^*-алгебра с единицей D изоморфна алгебре $C(\Omega)$ всех непрерывных функций на некотором компакте Ω (Ω — пространство максимальных идеалов C^*-алгебры D). Элемент u определяет автоморфизм C^*-алгебры D: $a\mapsto u^*au$, который порождает гомеоморфизм t компакта Ω. При этом, если $a\sim a_f$, где $f(\omega)\in C(\Omega)$, то $u^*au\sim a_{f^t}$, где $f^t(\omega)=f(t\omega)$. Траекторией в Ω относительно гомеоморфизма t называется множество точек $\{\omega_n\}$, $-\infty<n<\infty$, таких, что $t\omega_n=\omega_{n-1}$.

Пусть π — некоторое неприводимое представление C^*-алгебры B в гильбертовом * пространстве H_π. Известно, что H_π разлагается в ортогональную сумму циклических относительно алгебры D подпространств H_i и каждое H_i изоморфно $L^2_{\mu_i}(\Omega)$, где μ_i — некоторые меры на Ω. При этом можно считать, что среди мер μ_i существует максимальная мера μ_0, которой все меры μ_i подчинены (см. ([1])).

Предложение 1. 1) *Мера μ_0 квазиинвариантна относительно t и гомеоморфизм t эргодичен.*

2) *μ_0 либо непрерывная, либо атомическая мера. Если μ_0 — атомическая мера, то множество точек ненулевой меры совпадает с одной из траекторий гомеоморфизма t.*

Теорема 1. 1) *Если μ_0 — непрерывная мера, то C^*-алгебра $\pi(B)$ не содержит компактных операторов.*

2) *Если μ_0 — атомическая мера и траектория $\{\omega_n\}$ гомеоморфизма t, на которой расположены все точки ненулевой меры, бесконечна, то представление π бесконечномерно и в пространстве представления H_π существует ортонормированный базис $\{e_n\}$, $-\infty<n<\infty$, в котором оператор $\pi(u)$ действует как двусторонний сдвиг, т. е. $\pi(u)e_n=e_{n-1}$, а каждый оператор $\pi(a_f)$, где $a_f\in D$, действует как диагональный оператор в этом базисе и $\pi(a_f)e_n=f(\omega_n)e_n$. Если траектория конечна, т. е. $\omega_k=\omega_{N+k}$ при некотором N, то представление π конечномерно, его размерность равна N и в пространстве представления H_π существует ортонормированный базис $e_0,\ldots,e_{N-1}$ такой, что $\pi(a_f)e_n=f(\omega_n)e_n$, где $a_f\in D$ и $\pi(u)e_n=e_{n-1}$, $\pi(u)e_0=e_{N-1}$.*

3) *Если мера μ_0 — атомическая и траектория гомеоморфизма t, на которой расположены все точки ненулевой меры, состоит из не изолированных друг от друга точек, то C^*-алгебра $\pi(B)$ не содержит компактных операто-*

* Все рассматриваемые в статье гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными.

ров. Если же эта траектория состоит из изолированных друг от друга точек, то $\pi(B)$ содержит все компактные операторы.

Теорема 2. 1) *Каждой траектории $\{\omega_n\}$ в Ω относительно гомеоморфизма t соответствует неприводимое представление π C^*-алгебры B, которое имеет вид, указанный в п. 2) теоремы 1.*

2) *Если замыкание траектории $\{\tilde{\omega}_n\}$ содержится в замыкании траектории $\{\omega_n\}$, а $\tilde{\pi}$ и π — соответствующие им неприводимые представления, то C^*-алгебру $\tilde{\pi}(B)$ можно рассматривать как образ C^*-алгебры $\pi(B)$ при некотором ее неприводимом представлении. В частности, если замыкания этих траекторий совпадают, то C^*-алгебры $\tilde{\pi}(B)$ и $\pi(B)$ изоморфны.*

3) *Разным траекториям соответствуют унитарно неэквивалентные представления.*

Теорема 3. 1) *Для того чтобы у C^*-алгебры B не было неприводимых представлений, содержащих в своем образе компактные операторы, необходимо и достаточно, чтобы в Ω не было траекторий относительно гомеоморфизма t, состоящих из изолированных одна от другой точек.*

2) *Если коммутативная под C^*-алгебра с единицей $D\approx C(\Omega)$ имеет счетную систему образующих, то, для того чтобы C^*-алгебра B была GCR-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы каждая траектория в Ω относительно t состояла из изолированных друг от друга точек. При этом существует взаимно однозначное соответствие между траекториями в Ω относительно t и классами эквивалентных неприводимых представлений C^*-алгебры B.*

3) *Для того чтобы две GCR алгебры B_1, B_2 коммутативные под-C^*-алгебры которых $D_1\approx C(\Omega_1)$, $D_2\approx C(\Omega_2)$ имеют счетные системы образующих, были изоморфны, достаточно, чтобы существовало гомеоморфное отображение φ компакта Ω_1 на Ω_2 такое, что $\varphi\circ t_1=t_2\circ\varphi$.*

Замечание. В [2,3] получена часть результатов теорем 1—3 для C^*-алгебры $U(G, Z)$, где Z — локально-компактное хаусдорфово пространство, а G — некоторая локально-компактная группа его преобразований.

Пример. Пусть Ω — окружность, D изоморфна $C(\Omega)$-алгебре всех непрерывных функций на ней, U — унитарный оператор в $L^2(\Omega)$ сдвига на не соизмеримый с π угол. В Ω нет траектории, все точки которой были бы изолированы от остальных ее точек и каждая траектория плотна в Ω. По теореме 2, п. 1) каждой траектории соответствует неприводимое представление C^*-алгебры B, которые по теореме 2, п. 3) попарно неэквивалентны. По теореме 2, п. 2) разным траекториям соответствуют представления, образы которых изоморфны, а из следствия 5.16 работы [2] вытекает, что все они изоморфны алгебре B.

Пусть H — гильбертово пространство, $\{e_n\}$, $-\infty<n<\infty$,— ортонормированный базис в нем, U — оператор двустороннего сдвига в H: $Ue_n=e_{n-1}$, D — C^*-алгебра с единицей диагональных операторов в базисе $\{e_n\}$ со счетной системой образующих и такая, что отображение $A\mapsto U^*AU$ будет автоморфизмом алгебры D и для любых n и m найдется оператор $A\in D$, у которого $A_{nn}\neq A_{mm}$ (если это не выполняется, то алгебра D конечномерна). Через B обозначим минимальную C^*-алгебру, содержащую оператор U и коммутативную C^*-алгебру D. Ω — пространство максимальных идеалов алгебры D есть компактификация дискретного множества точек $\{\omega_n\}$, $-\infty<n<\infty$, где $I_{\omega_n}=\{A\in D;\ A_{nn}=0\}$ — соответствующий максимальный идеал и D изоморфна алгебре $C(\Omega)$ всех непрерывных функций на Ω. Каждому оператору $A\in D$ соответствует функция $f(\omega)\in C(\Omega)$, для которой $Ae_n=f(\omega_n)e_n$. Такой оператор будем обозначать A_f. Существует гомеоморфизм t компакта Ω такой, что $U^*A_fU=A_{f^t}$, где $f^t(\omega)=f(t\omega)$. Следовательно, $t\omega_n=\omega_{n-1}$.

Пусть теперь H — гильбертово пространство с базисом $\{e_n\}$, $0\leqslant n<\infty$, U — оператор одностороннего сдвига: $Ue_n=e_{n-1}$, $UU^*=E$, $U^*U=P$, $E-P$ — проектор на одномерное пространство, порожденное вектором e_0, D — коммутативная C^*-алгебра с единицей диагональных операторов, с счетной системой образующих и такая, что $U^*AU\in D$, $UAU^*\in D$ для любого оператора $A\in D$. Ω — пространство максимальных идеалов алгебры D — есть компактификация дискретного счетного множества точек ω_n, $0\leqslant n<\infty$, где $I_{\omega_n}=\{A\in D,\ A_{nn}=0\}$ — соответствующий максимальный идеал. C^*-алгебра D изоморфна алгебре $C(\Omega)$ всех непрерывных функций на Ω. Каждому оператору $A\in D$ соответствует функция $f(\omega)\in C(\Omega)$ такая, что $Ae_n=f(\omega_n)e_n$; будем обозначать его A_f. Обозначим через $\tilde{B}$ минимальную C^*-алгебру, содержащую операторы U, U^* и алгебру D.

В алгебре $\tilde{B}$ содержатся все компактные операторы (см. ([4])). Следовательно, точки ω_n открыты и замкнуты в Ω и множество $\Omega_0=$ $=\Omega\diagdown\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\omega_n$ — компакт. Существуют гомеоморфизм d компакта Ω на компакт $\Omega\diagdown\omega_0$ такой, что $UA_fU^*=A_{f^d}$, где $f^d(\omega)=f(d\omega)$, и гомеоморфизм t компакта $\Omega\diagdown\omega_0$ на Ω такой, что $U^*A_fU=A_{f^t}$, где $f^t(\omega)=f(t\omega)$. Следовательно, $d\omega_n=\omega_{n+1}$, $t\omega_n=\omega_{n-1}$. При этом $d\circ t$ — тождественное отображение $\Omega\diagdown\omega_0$ на себя, а $t\circ d$ — тождественное отображение Ω на себя. Компакт Ω_0 инвариантен относительно t и d. Ограничения их на Ω_0 будут взаимно обратными его гомеоморфизмами.

Для алгебр B и $\tilde{B}$ справедливы все предыдущие теоремы.

Положим $B=B(\Omega,t)$, $\tilde{B}=\tilde{B}(\Omega,t)$. Так как Ω есть замыкание траектории $\{\omega_n\}$, то из п. 2) теоремы 2 следует

Теорема 4. 1) *Для того чтобы две C^*-алгебры $B(\Omega_1,t_1)$, $B(\Omega_2,t_2)$ ($\tilde{B}(\Omega_1,t_1)$, $\tilde{B}(\Omega_2,t_2)$) были изоморфны, достаточно, чтобы существовало гомеоморфное отображение φ компакта Ω_1 на Ω_2 такое, что $\varphi\circ t_1=t_2\circ\varphi$.*

Пусть R — оператор двустороннего (одностороннего) взвешенного сдвига в гильбертовом пространстве H, т. е. $Re_n=\lambda_{n-1}e_{n-1}$, векторы e_n, $-\infty<n<\infty$ $(0\leqslant n<\infty)$, образуют ортонормированный базис в H и $\lambda_n\geqslant\mu>0$ — его веса. $R=TU$ — его полярное разложение, где U — унитарный (изометрический) оператор двустороннего (одностороннего) сдвига, T — диагональный оператор, $T_{nn}=\lambda_n$ и пусть C^*-алгебра с единицей $B(R)$ ($\tilde{B}(R)$) порождена операторами R и R^*. Диагональные операторы $T_i=$ $=(U^*)^iTU^i$, $\tilde{T}_i=U^iT(U^*)^i$, $0\leqslant i<\infty$, являются счетным набором образующих коммутативной C^*-алгебры с единицей D, $D\subset B(R)$ ($\tilde{B}(R)$) и для любого $A\in D$ $U^*AU\in D$, $UAU^*\in D$. Следовательно, на алгебру $B(R)$ ($\tilde{B}(R)$) переносятся предыдущие результаты. Отметим, что свойства C^*-алгебры $B(R)$ зависят не столько от значений весов, сколько от порядка их расположения. Так, например, если $\lambda_n=1+n\alpha-[n\alpha]$, где α — иррациональное число меньше $^1/_2$, $[\cdot]$ означает целую часть числа, то C^*-алгебра D_1 изоморфна алгебре всех функций на отрезке $[1,2]$, непрерывных справа, имеющих предел слева в точках λ_n и непрерывных в остальных точках. Компакт Ω получается из отрезка $[1,2]$ добавлением счетного числа точек и каждая траектория плотна в Ω. Рассмотрим на отрезке $[1,2]$ отрезок $[1+k\alpha-[k\alpha],\ 1+s\alpha-[s\alpha]]$, где k и s — некоторые целые числа. Пусть теперь $\lambda_n=1$, если $1+n\alpha-[n\alpha]\in[1+k\alpha-[k\alpha],\ 1+s\alpha-[s\alpha]]$, и $\lambda_n=2$ в противном случае. Получающаяся при этом C^*-алгебра D_2 изоморфна C^*-алгебре D_1 и соответствующие им алгебры $B(R_1)$, $B(R_2)$ тоже изоморфны.

Рассмотрим счетное множество точек $\{\omega_k\}$, $-\infty<k<\infty$ $(0\leqslant k<\infty)$, и на этом множестве счетный набор функций $\{f_n(\omega_k)\}$, $-\infty<n<\infty$, таких, что $f_n(\omega_k)=\lambda_{k+n}$. Замыкание множества $\{\omega_k\}$ в топологии, определяемой этими функциями, и дает компакт Ω. Отметим, что $f_n(t\omega)=f_{n-1}(\omega)$. Так как компакт Ω обладает счетной базой окрестностей, то для любой точки $\omega\in\Omega$ существует подпоследовательность точек $\{\omega_{k_s}\}$, сходящаяся к ω, т. е. для любого n существует $\lim\limits_{s\to\infty}f_n(\omega_{k_s})=\lim\limits_{s\to\infty}\lambda_{k_s+n}=f_n(\omega)$. Тогда $f_n(t^p\omega)=\lim\limits_{s\to\infty}f_n(t^p\omega_{k_s})=\lim\limits_{s\to\infty}\lambda_{k_s+n-p}$. Для того чтобы траектрия гомеоморфизма t, проходящая через точку ω, состояла из изолированных одна от другой точек, необходимо и достаточно выполнения одного из двух условий: 1) существует p такое, что $t^p\omega=\omega$, т. е. траектория $\{t^k\omega\}$ периодическая, 2) существует окрестность V_ω точки ω такая, что $t^p\omega\notin V_\omega$ для любого $p\neq0$. Отсюда и из п. 2) теоремы 3 следует

Теорема 5. *Для того чтобы C^*-алгебра $B(R)$ ($\tilde{B}(R)$) была GCR-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности целых чисел k_s, $s=0, 1, \ldots$, для которой существует $\lim\limits_{s\to\infty}\lambda_{k_s+n}$ для всех целых n, выполнялось одно из двух условий*:

1) *существует p такое, что $\lim\limits_{s\to\infty}\lambda_{k_s+n}=\lim\limits_{s\to\infty}\lambda_{k_s+n-p}$ для всех n*, 2) *существуют $\varepsilon>0$ и номер N такие, что для любого целого p существует номер i_p, $|i_p|<N$, и номер s_p, для которых при всех $s>s_p$*

$$|\lambda_{k_s+i_p}-\lambda_{k_s+i_p-p}|>\varepsilon.$$

Из теоремы 5 вытекают следующие результаты, полученные другим способом в ([5]).

Предложение 2. 1) *Пусть R — односторонний (двусторонний) взвешенный сдвиг, веса которого образуют положительную почти периодическую последовательность, отделенную снизу от нуля. C^*-алгебра $B(R)$ ($\tilde{B}(R)$) будет GCR-алгеброй тогда и только тогда, когда $R=Q+Z$, где Q и Z — операторы одностороннего (двустороннего) сдвига и веса оператора Q образуют положительную периодическую последовательность, а веса Z — действительную последовательность, сходящуюся к нулю. Если $B(R)$ ($\tilde{B}(R)$) — GCR-алгебра, то в Ω, кроме траектории $\{\omega_n\}$, есть еще только одна траектория — периодическая, период которой равен периоду последовательности весов оператора Q и, следовательно, у этой алгебры, кроме тождественного, будет еще только одно неприводимое представление — конечномерное, соответствующее периодической траектории.*

2) *Пусть R — односторонний взвешенный сдвиг такой, что $\lambda_{n_k}=2$ и $\lambda_n=1$ при $n\neq n_k$, где $\{n_k, k=1, 2, \ldots\}$ — строго возрастающая последовательность целых чисел такая, что для любого целого $N>0$ существует конечное число решений $n_k-n_l=N$. Тогда $\tilde{B}(R)$ — GCR-алгебра.*

Автор глубоко признателен М. А. Наймарку за внимание к работе и А. И. Штерну за многочисленные и полезные ее обсуждения.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступило
10 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. Dixmier*, Les algebras d'operateurs dans l'espace hilbertien, Paris, 1969. [2] *E. Effros*, Mem. Am. Math. Soc., № 75 (1967). [3] *E. G. Gootman*, Pacific J. Math., v. 48, № 1 (1973). [4] *L. A. Coburn*, Bull. Am. Math. Soc., v. 73, № 5 (1967). [5] *J. W. Bunce, J. A. Deddens*, Indiana Univ. Math. J., v. 23, № 3 (1973).