

О. В. ЕПИФАНОВ

ОБ ЭПИМОРФИЗМЕ СВЕРТКИ В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 2 I 1974)

Пусть G — выпуклая область комплексной плоскости с опорной функцией $g(-\theta)$, $H(G)$ — пространство аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости внутри G . Пространство $H'(G)$ — сопряженное к $H(G)$ — совпадает (с точностью до изоморфизма) с пространством $[1, g(\theta)]$ целых функций экспоненциального типа с индикаторами $<g(\theta)$. Индуктивный предел последовательности возрастающих (B) -пространств задает в $[1, g(\theta)] = H'(G)$ сильную топологию (см., например, (1)). Для $x \in H(G)$ и $\psi \in [1, g(\theta)]$

$$\langle x, \psi \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C x(t) \psi(t) dt,$$

где $\bar{\psi}$ — преобразование Бореля функции $\psi(z)$, а C — контур в G , охватывающий особенности $\bar{\psi}$.

Зафиксируем экспоненциальную функцию $a(z)$ с индикатором $h(\theta)$ и сопряженной индикаторной диаграммой A . На элементах $H(G_1)$, где G_1 — выпуклая область, содержащая некоторый сдвиг множества A , определим операцию свертки:

$$(a*x)(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C x(t) \tilde{a}(t-z) dt,$$

где контур C близок к ∂G_1 . Функция $(a*x)(z)$ аналитическая в некоторой области. Для того чтобы при выпуклых G, G_1 оператор свертки действовал из $H(G_1)$ в $H(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $G+A \subseteq G_1$. При этом действие свертки непрерывно. В работе Ю. Ф. Коробейника (2) (дополнение и уточнение в (3)) доказано, что если $a(z)$ вполне регулярного роста, то $a*(H(G+A)) = H(G)$ для любой выпуклой области G . Здесь мы приводим условия на выпуклые области G, G_1 и функцию $a(z)$, при которых свертка является эпиморфизмом, т. е.

$$a*(H(G_1)) = H(G). \tag{1}$$

Пусть G, G_1 — выпуклые области с опорными функциями $g(-\theta), g_1(-\theta)$ и свертка действует из $H(G_1)$ в $H(G)$. Тогда сопряженный оператор действует из $[1, g(\theta)]$ в $[1, g_1(\theta)]$ и имеет вид умножения на функцию $a(z)$. В силу известной теоремы двойственности для рефлексивных пространств Фреше, равенство (1) выполняется тогда и только тогда, когда $a \cdot [1, g)$ замкнуто в $[1, g_1)$. Обозначим через I множество всех элементов $[1, g_1)$, делящихся на $a(z)$. Очевидно, что I замкнуто и $a \cdot [1, g) \subseteq I$. Из работы (4) следует, что $a \cdot [1, g)$ плотно в I , т. е. замкнутость $a \cdot [1, g)$ в $[1, g_1)$ равносильна равенству $a \cdot [1, g) = I$.

Обозначим через $\delta(g)$ объединение всех открытых интервалов (θ_n, θ_{n+1}) , на которых тригонометрически выпуклая (т.в.) функция $g(\theta)$ является тригонометрической; $\alpha(g) = \{\theta: g(\theta) = \infty\}$. Ограниченной т.в. функции $h(\theta)$ поставим в соответствие функцию $h_{\delta(g)}(\theta)$ — наибольшую т.в. функцию

совпадающую с $h(\theta)$ вне $\delta(g)$:

$$h_{\delta(g)}(\theta) = \begin{cases} h(\theta), & \theta \notin \delta(g), \\ h(\theta_n) \frac{\sin(\theta_{n+1}-\theta)}{\sin(\theta_{n+1}-\theta_n)} + h(\theta_{n+1}) \frac{\sin(\theta-\theta_n)}{\sin(\theta_{n+1}-\theta_n)}, & \theta \in (\theta_n, \theta_{n+1}), \\ & n=1, 2, \dots \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть $h(\theta)$ — индикатор $a(z)$, \tilde{R} — множество θ таких, что $a(z)$ не вполне регулярно растет на луче $\arg z = \theta$. Для замкнутости $a \cdot [1, g(\theta))$ в $[1, g_1(\theta))$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:

- 1) $\forall \theta \quad g(\theta) + h(\theta) \leq g_1(\theta) \leq g(\theta) + h_{\delta(g)}(\theta)$,
- 2) $\tilde{R} \subseteq \alpha(g) \cup \delta(g)$.

Достаточность условий 1), 2) и необходимость условия 1) следует из свойств т.в. функций и свойства функции вполне регулярного роста на луче. При доказательстве необходимости 2) (от противного) для функции $a(z)$ не вполне регулярного роста на луче $\arg z = \theta$, $\theta \notin \alpha(g) \cup \delta(g)$ указывается существование функции $\psi(z)$ такой, что $a\psi \in I$, но $\psi \notin [1, g)$, что противоречит равенству $a \cdot [1, g) = I$. При этом используется

Лемма. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ ($f \in F_\rho$) не вполне регулярно растет на луче $\arg z = \theta$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \psi \in F_\rho: \forall \theta \quad h_{f\psi}(\theta) < h_f(\theta) + \varepsilon \quad \text{и} \quad h_\psi(\theta) > \varepsilon(1+c),$$

где $c > 0$ и не зависит от ε , когда $\varepsilon \in (0; 1]$.

Для указанной $f(z)$ найдутся $\lambda, \xi > 0$ и $r_k \uparrow \infty$ такие, что выполняется неравенство $h_f(r, \theta) < h_f(\theta) - \lambda$ для $z = re^{i\theta}$ в кругах $K_{r_k, \xi} = \{z: |z - r_k| < \xi l_k\}$, $k=1, 2, \dots$. Этот факт содержится по существу в доказательстве леммы 2 работы (5). Следуя методу (5), строится субгармоническая функция $u_1(z)$, совпадающая с $\varepsilon_1 |z|^\rho$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$, вне $\bigcup_{k=1}^{\infty} K_{r_k, \eta}$, $\eta \leq \xi$, и гармоническая в $K_{r_k, \eta}$, $k=1, 2, \dots$. При достаточно малых η и ε_1 , близких к ε , из оценок для $u_1(z)$, аналогичных проведенным в (6), следует, что целая функция $\psi(z)$, аппроксимирующая $u_1(z)$ по теореме 2 работы (6), удовлетворяет нужным условиям.

Непосредственно из теоремы 1 следует

Теорема 2. $a^*(H(G_1)) = H(G)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия 1), 2) теоремы 1.

Геометрически условие 1) эквивалентно вложениям $G+A \subseteq G_1 \subseteq G+A_{\delta(g)}$, где $A_{\delta(g)} = \bigcap_{\theta \in \delta(g)} \{z: \operatorname{Re}(ze^{i\theta}) \leq h(\theta)\}$, а условие 2) состоит в том, что $a(z)$

имеет вполне регулярный рост по всем лучам $\arg z = \theta$ таким, что опорная прямая к G , соответствующая направлению $-\theta$, существует и является касательной (хотя бы односторонней) к границе G .

Следствие. Если G — выпуклая ограниченная область с гладкой границей, то (1) выполняется тогда и только тогда, когда $G_1 = G+A$ и $a(z)$ — функция вполне регулярного роста.

Для фиксированной G_1 , содержащей сдвиг A , существует единственная выпуклая область G , для которой выполняется условие 1) и, следовательно, возможно (1), а именно, $G = \{\lambda: \lambda + A \subseteq G_1\}$.

Ростовский государственный университет

Поступило
27 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ О. В. Енифанов, Матем. анализ в его приложения, т. 1, 72 (1969). ² Ю. Ф. Коробейник, Матем. сборн., т. 75, 225 (1968). ³ Ю. Ф. Коробейник, Матем. анализ и его приложения, т. 3, 3 (1971). ⁴ И. Ф. Красичков-Терновский, Матем. сборн., т. 88, 3 (1972). ⁵ В. С. Азарин, Теория функций, функц. анализ и их приложения, т. 2, 55 (1966). ⁶ В. С. Азарин, Матем. сборн., т. 79, 463 (1969).