

Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Л. И. ПОМЕРАНЦЕВА

**ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ  $n$  ПАР ФУНКЦИЙ С МАТРИЦАМИ  
ПОДСТАНОВОЧНОГО ТИПА**

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 21 XI 1973)

1. Пусть  $L$  — сложный кусочно-гладкий контур <sup>(6, 7)</sup>, расположенный в конечной части плоскости  $z$ . Через  $\Lambda$  обозначим конечное множество точек контура  $L$ , содержащее все нерегулярные точки. Допустим, что множество  $L \setminus \Lambda$  состоит из конечного числа непересекающихся связных компонент  $L_1, \dots, L_N$  («кривых» контура  $L$ ), каждая из которых есть гладкая кривая, гомеоморфная интервалу  $(0, 1)$  числовой оси. Пусть на каждой кривой  $L_j$  контура  $L$  задана  $H$ -непрерывная матрица-функция  $G_j(t)$  порядка  $n$ , не вырождающаяся ни в одной точке. Предположим, что  $G_j(t)$   $H$ -непрерывно продолжима на начальную и конечную точки кривой  $L_j$ , а получающиеся при этом предельные значения являются невырожденными матрицами. Определенную таким образом на  $L \setminus \Lambda$  матрицу-функцию обозначим через  $G(t)$ . Аналогично зададим на  $L \setminus \Lambda$   $H$ -непрерывную вектор-функцию  $g(t)$  ( $n$ -мерный вектор-столбец).

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти все векторы-столбцы  $\Phi(z)$ , голоморфные вне  $L$ , исчезающие на бесконечности,  $H$ -непрерывно продолжимые слева и справа на  $L \setminus \Lambda$ , где должно выполняться краевое условие

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L \setminus \Lambda. \quad (1)$$

Вблизи точек множества  $\Lambda$  искомые векторы должны быть почти ограниченными <sup>(1)</sup>. Ограничимся случаем, когда  $G(t)$  есть матрица «подстановочного типа». Это означает, что для каждого  $j$  матрица-сужение  $G_j(t)$  имеет при  $t \in L_j$  ровно  $n$  ненулевых элементов, а все прочие ее элементы равны нулю тождественно. Частные случаи задачи (1) с матрицами указанного типа были рассмотрены ранее Г. П. Черепановым <sup>(2)</sup> и В. Е. Кругловым <sup>(3)</sup>.

2. Лемма. Краевую задачу (1) с матрицей подстановочного типа можно заменить равносильной ей задачей такого же типа на том же контуре так, что дополнение до всей плоскости множества тех кривых контура  $L$ , на которых матрица новой задачи не диагональна, будет связным.

Будем считать, что утверждение леммы справедливо уже для задачи (1). Пусть кривые контура  $L$  перенумерованы так, что на кривых  $L_1, \dots, L_K$  матрица  $G(t)$  не диагональна, а на остальных кривых  $L_{K+1}, \dots, L_N$  диагональна. Обозначим через  $Z$  замкнутую комплексную плоскость, разрезанную линиями  $L_1, \dots, L_K$ . Левый и правый берега разреза  $L_j$  обозначим символами  $L_j^+$  и  $L_j^-$  и будем считать, что они принадлежат множеству  $Z$ . Таким образом,  $Z$  — конечная связная поверхность рода нуль с краем.

Каждой кривой  $L_j$  с заданной на ней матрицей  $G_j(t)$  сопоставим подстановку  $T_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ . В этой подстановке число  $j_k$  определяется как номер того столбца матрицы  $G_j(t)$ , на пересечении которого с  $k$ -ой строкой стоит ненулевой элемент  $G_{kj_k}(t) \neq 0$ .

Возьмем теперь  $n$  экземпляров (листов)  ${}_1Z, {}_2Z, \dots, {}_nZ$  поверхности  $Z$  и будем считать, что они расположены над плоскостью  $z$  в порядке возрастания номеров. Склеим листы  ${}_kZ$  вдоль разрезов  ${}_kL_j^\pm$  по закону подстановок  $T_j$ . В результате склеивания получим замкнутую  $n$ -листную разветвленную поверхность наложения плоскости  $z$ , причем подстановки  $T_1, \dots, T_n$  являются образующими группы монодромии этой поверхности, а точки ветвления лежат над точками множества  $\Lambda$ . Снабжая построенную поверхность естественной конформной структурой [3], получим замкнутую ориентируемую риманову поверхность  $\mathfrak{R}$ .

3. Сведем теперь задачу (1) к краевой задаче Римана для одной неизвестной функции на римановой поверхности  $\mathfrak{R}$ . Множество точек поверхности  $\mathfrak{R}$ , лежащих над  $L$ , образует сложный кусочно-гладкий контур  $\Gamma \subset \mathfrak{R}$ . Ориентируем  $\Gamma$  так, чтобы отображение проектирования на плоскости  $z$  индуцировало на  $L$  положительную ориентацию. Точки  $p \in \mathfrak{R} \setminus \Gamma$  можно задавать в виде пар  $(z, k)$ , где  $z$  — комплексная координата, а  $k$  — номер листа.

Введем на  $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$  неизвестную функцию  $F(p) \equiv F(z, k)$ , полагая

$$F(z, k) = \begin{cases} \Phi_1(z), & k=1, \\ \dots & \dots \\ \Phi_n(z), & k=n, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\Phi_k(z)$  — компоненты неизвестного вектора  $\Phi(z)$  задачи (1). По матрице  $G_j(t)$  и вектору  $g_j(t)$  задачи (1) определим следующие функции на  $\Gamma_j$ :

$$H_j(t, k) = \begin{cases} G_{1j_1}(t), & k=1; \\ \dots & \dots \\ G_{nj_n}(t), & k=n; \end{cases} \quad h_j(t, k) = \begin{cases} g_1(t), & k=1; \\ \dots & \dots \\ g_n(t), & k=n; \end{cases} \quad (3)$$

$$t \in L_j; \quad j=1, \dots, N.$$

Тем самым на контуре  $\Gamma$  определены функции  $H(\tau)$  и  $h(\tau)$ .

С помощью введенных обозначений краевое условие (1) переписывается в виде

$$F^+(\tau) = H(\tau) \cdot F^-(\tau) + h(\tau), \quad \tau \in \Gamma, \quad D^{-1}|(F), \quad (4)$$

где  $D$  — дивизор порядка  $(-n)$ , составленный из бесконечно удаленных точек поверхности  $\mathfrak{R}$ , взятых с кратностью  $(-1)$ . Задача (1) сведена, таким образом, к равносильной ей краевой задаче Римана (4) на римановой поверхности  $\mathfrak{R}$ .

4. Перейдем к изучению картины разрешимости задачи (1). Поверхность  $\mathfrak{R}$  является связной или нет, смотря по тому, действует группа монодромии транзитивно или нет. Ограничиваясь здесь только первым случаем, мы для нахождения картины разрешимости должны вычислить числа  $\rho$  и  $\kappa$ , где  $\rho$  — род поверхности  $\mathfrak{R}$ , а  $\kappa$  — индекс коэффициента  $H(\tau)$  задачи (4). Для вычисления  $\rho$  применим формулу Римана — Гурвица (4). Все точки ветвления поверхности  $\mathfrak{R}$  лежат над  $\Lambda$ . Пусть  $t_v \in \Lambda$ . Через  $\delta(t_v, L_j)$  обозначим коэффициент инцидентности точки  $t_v$  и кривой  $L_j$ :

$$\delta(t_v, L_j) = \begin{cases} +1, & \text{если } L_j \text{ начинается в } t_v, \\ -1, & \text{если } L_j \text{ оканчивается в } t_v, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5)$$

Образуем подстановку

$$T(t_v) = \prod_j T^{\delta(t_v, L_j)}. \quad (6)$$

В это произведение не входят множители, для которых  $\delta(t_v, L_j) = 0$ , а остальные множители расположены слева направо в таком порядке, в каком кривые  $L_j$  встречаются при обходе вокруг  $t_v$  против часовой стрелки.

Подстановку (6) представим в виде произведения попарно независимых циклов. Число циклов — это число точек поверхности  $\mathfrak{R}$ , лежащих над  $t_v$ , а порядки  $\alpha_{\mu\nu}$  циклов — это порядки ветвления соответствующих точек. Таким образом, по формуле Римана—Гурвица имеем

$$\rho = 1/2 \sum_{\mu, \nu} (\alpha_{\mu\nu} - 1) + n - 1. \quad (7)$$

На каждой кривой  $L_j$  контура  $L$  зафиксируем произвольно ветви аргументов  $\arg G_{kj\kappa}(t)$  всех элементов матрицы  $G_j(t)$ . Для каждого  $t_v \in \Lambda$  образуем произведение матриц

$$G(t_v) = \prod_j^{\curvearrowright} \{G_j(t_v)\}^{\delta(t_v, L_j)}, \quad (8)$$

используя обозначения (5) и (6). Матрица  $G(t_v)$  подстановочного типа. Она распадается на блоки  $B_\mu(t_v)$ , соответствующие разложению подстановки (6) на циклы. Индекс  $\kappa$  коэффициента задачи (4) вычисляется по формуле (5, 6)

$$\kappa = \sum_{\mu, \nu} \left[ \frac{1}{2\pi} \arg(\pm \det B_\mu(t_\nu)) \right], \quad (9)$$

где [...] означает целую часть; знак перед определителем  $\det B_\mu(t_\nu)$  выбирается так, чтобы в результате получилось произведение элементов определителя.

Обозначим через  $l$  число решений однородной задачи (1), а через  $l'$  — число решений сопряженной задачи:

$$d\Psi^-(t) = d\Psi^+(t) \cdot G(t), \quad t \in L \setminus \Lambda, \quad (10)$$

где  $d\Psi(z)$  — неизвестный кусочно-мероморфный вектор-дифференциал (строка), допускающий простой полюс на бесконечности и имеющий интегрируемые особенности вблизи точек множества  $\Lambda$ . Используя теорию (6, 7) задачи (4), получим следующие результаты.

**Т е о р е м а.** При указанных выше ограничениях индекс задачи (1) вычисляется по формуле

$$l - l' = \kappa - n - \rho + 1. \quad (11)$$

Если  $\kappa - n < 0$ , то  $l = 0$ ,  $l' = n + \rho - \kappa - 1$ . Если  $\kappa - n > 2\rho - 2$ , то  $l = \kappa - n - \rho + 1$ ,  $l' = 0$ . В «особом случае» имеет место точная оценка

$$\max\{0, \kappa - n - \rho + 1\} \leq l \leq [(\kappa - n)/2] + 1.$$

Для разрешимости неоднородной задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_L d\Psi^+(t) \cdot g(t) = 0,$$

где  $d\Psi(z)$  — любое решение задачи (10).

5. Каноническая матрица (4) задачи (1) может быть построена за счет аналитического аппарата (6, 7), дающего решение задачи (4). Пусть  $f(z, w) = 0$  — алгебраическое уравнение римановой поверхности  $\mathfrak{R}$ . Общее решение однородной задачи (4) строится явно и может быть представлено в виде

$$F(z, w) = \varphi(z, w) \cdot X(z, w), \quad (12)$$

где  $X(z, w)$  удовлетворяет краевому условию однородной задачи (4) и ограничена на бесконечности, а  $\varphi(z, w)$  — произвольная рациональная от

$(z, w)$  функция, кратная специально построенному дивизору  $Q^{-1}$  порядка  $(n-\kappa)$ .

Пусть  $K$  — линейное пространство всех рациональных от  $(z, w)$  функций, которые при конечных  $z$  кратны дивизору  $Q^{-1}$ , а на бесконечности допускают полиномиальный рост. Через

$$\varphi_1(z, w), \quad \varphi_2(z, w), \quad \dots, \quad \varphi_n(z, w) \quad (13)$$

обозначим нормальный базис <sup>(1)</sup> пространства  $K$ . Функции базиса линейно независимы над кольцом многочленов от  $z$ , и любая функция  $\varphi(z, w) \in K$  является их линейной комбинацией с полиномиальными коэффициентами. Кроме того,  $\varphi_\mu(z, w) = O(z^{-\kappa_\mu})$  при  $z \rightarrow \infty$ , где  $\kappa_\mu$  — целые числа, удовлетворяющие условию  $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$ , причем их нельзя уменьшить.

Заменяя в (12) функцию  $\varphi(z, w)$  линейной комбинацией функций базиса (13), получим

$$F(z, w) = \sum_{\mu=1}^n P_{\kappa_\mu-1}(z) \cdot \varphi_\mu(z, w) \cdot X(z, w), \quad (14)$$

где  $P_m(z)$  — произвольный многочлен степени  $m$ , если  $m \geq 0$ , и  $P_m(z) = 0$ , если  $m < 0$ .

Выделяя однозначные на листах  ${}_nZ$  ветви решения (14) и учитывая обозначение (2), получим общее решение однородной задачи (1). Отсюда следует явная формула для канонической матрицы задачи (1), причем введенные выше числа  $\kappa_\mu$  являются частными индексами. Зная явный вид канонической матрицы, легко построить общие решения неоднородной задачи (1) и союзной задачи (10).

Одесский педагогический институт  
им. К. Д. Ушинского

Поступило  
1 IX 1973

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968.  
<sup>2</sup> Г. П. Черепанов, ДАН, т. 161, № 6 (1965).    <sup>3</sup> В. Е. Круглов, Кандидатская диссертация, Одесса, 1973.    <sup>4</sup> Н. Г. Чеботарев, Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948.  
<sup>5</sup> Дж. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960.    <sup>6</sup> Э. И. Зверович, УМН, т. 26, 1 (157) (1971).    <sup>7</sup> Э. И. Зверович, ДАН, т. 198, № 1 (1971).