

Л. АККАРДИ (ИТАЛИЯ)

О ПРОСТРАНСТВЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ ИЗ МЕР

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 XI 1973)

1. В этой заметке устанавливается связь между теорией бесконечных прямых произведений гильбертовых пространств и теорией меры на произведении бесконечных семейств измеримых пространств. В частности, получена классификация бесконечных продакт-мер в терминах некоторых неполных компонент бесконечного тензорного произведения гильбертовых пространств. Утверждение о возможности применения теории бесконечных продакт-мер было сформулировано Дж. фон Нейманом в (1), стр. 326. Оказывается, что естественным пространством для этой проблемы является комплексное гильбертово пространство, порожденное «квадратными корнями» из вещественных ограниченных мер на заданном измеримом пространстве.

2. Пусть $(\Omega, \mathfrak{B})$ — измеримое пространство. Обозначим через $\mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$ вещественное банахово пространство ограниченных вещественных счетно-аддитивных мер на $(\Omega, \mathfrak{B})$. Если $x, y \in \mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$, то будем писать $x \perp y$; если x ортогонально y (см. (7)), положим $|x| = x^+ + x^-$, где $x = x^+ - x^-$ — жорданово разложение x , и запишем $x < y$, если x абсолютно непрерывна относительно y . «Жорданово разбиение Ω » есть измеримое разбиение $\{E^+, E^-\}$, Ω такое, что $x^+(E^+) = x^+(\Omega)$, $x^-(E^-) = x^-(\Omega)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_R^+(\Omega, \mathfrak{B})$ конус положительных мер в $\mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$. Если $m, n \in \mathfrak{M}_R^+(\Omega, \mathfrak{B})$, то существует единственная положительная мера, определяемая выражением

$$A \in \mathfrak{B} \mapsto \int_A \sqrt{\frac{dm}{dq} \frac{dn}{dq}} dq,$$

где q — произвольная мера такая, что $m < q$, $n < q$. Выписанный выше интеграл не зависит от выбора q ; поэтому определяемую им меру можно обозначить $\sqrt{mn}$.

Пусть $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B})$ — комплексное векторное пространство, порожденное символами $[x]$, $x \in \mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$, со следующими отношениями между образующими:

- [r1]. $[x+x'] - [x] - [x'] = 0$, если $x \perp x'$;
- [r2]. $[\xi \cdot x] - \sqrt{\xi} \cdot [x] = 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $i_2 = -1$;
- [r3]. $[m] + [n] - [m+n+2\sqrt{mn}] = 0$, $m, n \in \mathfrak{M}_R^+(\Omega, \mathfrak{B})$;
- [r4]. $[m] - [n] - [\chi_+ \cdot (m+n-2\sqrt{mn})] + [\chi_- \cdot (m+n-2\sqrt{mn})] = 0$,

где $m, n \in \mathfrak{M}_R^+(\Omega, \mathfrak{B})$, а χ_+ , χ_- — характеристические функции жорданова разбиения Ω , соответствующего мере $m-n$.

Обозначим через E свободное комплексное векторное пространство, порожденное элементами $[x]$, и через E_0 — его подпространство, порожденное выражениями $[r1], \dots, [r4]$.

Л е м м а 1. Каждый элемент $e \in E$ определяет единственным образом две меры $x, y \in \mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$ такие, что $e = [x^+] - [x^-] + i([y^+] - [y^-]) \pmod{E_0}$.

Определим полуторалинейную форму β , продолжающую на $E \times E$ равенство

$$\beta([x], [y]) = \rho(x^+, y^+) - i\rho(x^+, y^-) + i\rho(x^-, y^+) + \rho(x^-, y^-), \quad (1)$$

где $x, y \in \mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$, а $\rho(m, n)$ обозначает интеграл Хеллингера от $m, n \in \mathfrak{M}_R^+(\Omega, \mathfrak{B})$, определенный равенством $\rho(m, n) = \sqrt{mn}(\Omega)$.

Теорема 1. Полуторалинейная форма β индуцирует скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B}) = E/E_0$. Это скалярное произведение определяет на $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B})$ структуру комплексного гильбертова пространства.

Доказательство этой теоремы основывается на том факте, что $E_0 = \{c \in E: \beta(c, c) = 0\}$ и использует следующее утверждение.

Лемма 2. Для каждого $\varepsilon > 0$ определим в $\mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B}) \times \mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$ подмножество $V(\varepsilon) = \{(x, y): \|x\| + \|y\| - 2[\rho(x^+, y^+) + \rho(x^-, y^-)] \leq \varepsilon\}$.

Тогда множества $V(\varepsilon)$ представляют собой окрестности диагонали в базе равномерной структуры, которая изоморфна равномерной структуре, индуцированной нормой, на каждом ограниченном по норме подмножестве в $\mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$.

Пусть $\pi: E/E_0 \rightarrow \mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B})$ — каноническая проекция. Определим отображение

$$\kappa: x \in \mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B}) \rightarrow \pi[x] \in \mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B}). \quad (2)$$

Теорема 2. Отображение κ есть гомеоморфизм $\mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$ на его образ, обладающий следующими свойствами:

$$[i1]. \kappa(x) = \kappa(x^+) + i\kappa(x^-), \quad i^2 = -1;$$

$$[i2]. \kappa(\xi \cdot x) = \sqrt{\xi} \cdot \kappa(x), \quad \xi \in \mathbb{R};$$

$$[i3]. \|\kappa(x)\|_{\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B})}^2 = \|x\|_{\mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})};$$

$$[i4]. \kappa(m) + \kappa(n) = \kappa(m + n + 2\sqrt{mn}), \quad m, n \in \mathfrak{M}_R^+(\Omega, \mathfrak{B});$$

$$[i5]. \kappa(m) - \kappa(n) = \kappa[\chi_+ \cdot (m + n - 2\sqrt{mn})] - \kappa[\chi_- \cdot (m + n - 2\sqrt{mn})],$$

где $m, n \in \mathfrak{M}_R^+(\Omega, \mathfrak{B})$, а χ_+, χ_- — характеристические функции жорданова разбиения, соответствующего мере $m - n$.

Перечисленные выше свойства оправдывают интерпретацию элемента $\kappa(x)$ как «квадратного корня» из меры $x \in \mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$. По этой причине мы будем часто использовать в дальнейшем обозначение $\kappa(x) = \sqrt{x}$. Произвольный вектор в $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B})$ имеет форму

$$h = (\sqrt{x^+} - \sqrt{x^-}) + i(\sqrt{y^+} - \sqrt{y^-}).$$

Следовательно, на $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B})$ можно определить каноническую инволюцию $J(h) = \sqrt{x^+} - \sqrt{x^-} - i(\sqrt{y^+} - \sqrt{y^-})$ и подпространство неподвижных элементов для J есть вещественное пространство, порожденное конусом $\kappa\{\mathfrak{M}_R^+(\Omega, \mathfrak{B})\}$. Обозначим это пространство через $\mathcal{H}_r(\Omega, \mathfrak{B})$.

Теорема 3. Существует гомеоморфизм $\alpha: \mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B}) \rightarrow \mathcal{H}_r(\Omega, \mathfrak{B})$, который обладает свойствами [13], [14], [15], указанными в теореме 2, и, кроме того,

$$[i1']. \alpha(x) = \alpha(x^+) - \alpha(x^-);$$

$$[i2']. \alpha(\xi x) = \sqrt{\xi} \cdot \alpha(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^+.$$

Эти свойства характеризуют пространство $\mathcal{H}_r(\Omega, \mathfrak{B})$ с точностью до унитарного изоморфизма.

Поскольку $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B}) = \mathcal{H}_r(\Omega, \mathfrak{B}) \oplus i\mathcal{H}_r(\Omega, \mathfrak{B})$, то пространство $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B})$ также характеризуется этими свойствами с точностью до унитарного изоморфизма. Можно доказать, что пространство $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B})$ изоморфно индуктивному пределу семейства $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathfrak{B}, x)$ при $x \in \mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$. Эти свойства характеризуют пространство $\mathcal{H}_r(\Omega, \mathfrak{B})$ с точностью до унитарного изоморфизма.

Поскольку $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B}) = \mathcal{H}_r(\Omega, \mathfrak{B}) \oplus i\mathcal{H}_r(\Omega, \mathfrak{B})$, то пространство $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B})$ также характеризуется этими свойствами с точностью до унитарного изо-

морфизма. Можно доказать, что пространство $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{B})$ изоморфно индуктивному пределу семейства $\{L^2(\Omega, \mathfrak{B}, x)\}$ при $x \in \mathfrak{M}_R(\Omega, \mathfrak{B})$.

3. Пусть $(\Omega_i, \mathfrak{B}_i)_{i \in I}$ — семейство измеримых пространств.

Определение 1. Две продакт-меры $\prod_{i \in I} x_i, \prod_{i \in I} y_i$ называются асимптотически эквивалентными, если существует конечное подмножество $F \subset I$ такое, что две продакт-меры $\prod_{i \in I-F} x_i, \prod_{i \in I-F} y_i$ не ортогональны.

Лемма 3. Отношение асимптотической эквивалентности есть отношение эквивалентности на множестве продакт-мер.

Таким образом, множество всех продакт-мер расщепляется на классы асимптотической эквивалентности. Для каждого такого класса $\overline{\mathfrak{G}}$ определим замкнутое подпространство $\mathcal{H}(\overline{\mathfrak{G}})$ пространства $\mathcal{H}_r(\prod_{i \in I} \Omega_i, \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i)$, порождаемое образами продакт-мер на классе эквивалентности $\overline{\mathfrak{G}}$ отображением α , определенным в теореме 3). Образует бесконечное прямое произведение $\otimes_{i \in I} \mathcal{H}_r(\Omega_i, \mathfrak{B}_i)$. Пусть α_i для каждого $i \in I$ есть отображение,

определенное в теореме 3, и пусть $(\alpha_i(x_i))_{i \in I} — C_0$ -семейство (см. (1), определение 3.31).

Определение 2. Будем говорить, что C_0 -семейство $(\alpha_i(x_i))_{i \in I}$ существенно положительно, если существует конечное множество $F \subset I$ такое, что x_i положителен для всех $i \in I - F$. Класс эквивалентности $\overline{\mathfrak{G}}$ C_0 -семейств (в смысле (1)) будем называть существенно положительным, если он содержит единственно положительное C_0 -семейство.

Теорема 4. Существует взаимно однозначное соответствие между существенно положительными классами эквивалентности C_0 -семейств и классами асимптотически эквивалентности продакт-мер на $\prod_{i \in I} (\Omega_i, \mathfrak{B}_i)$.

Если $\overline{\mathfrak{G}}^+ — класс продакт-мер, соответствующий $\overline{\mathfrak{G}}^+$, то существует унитарный изоморфизм $U_{\overline{\mathfrak{G}}^+}$ между неполным тензорным произведением $\otimes_{i \in I} \mathcal{H}_r(\Omega_i, \mathfrak{B}_i)$ и пространством $\mathcal{H}(\overline{\mathfrak{G}}^+)$, характеризуемым свойством$

$U_{\overline{\mathfrak{G}}^+}((\alpha_i(x_i))) = \alpha(\prod_{i \in I} x_i)$ для каждого существенно положительного C_0 -семейства $(\alpha_i(x_i))_{i \in I}$ в $\overline{\mathfrak{G}}^+$.

Доказательство этой теоремы использует теорему Какутани (2), некоторые результаты из (1) и следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть $(\alpha_i(x_i))_{i \in I} — C_0$ -семейство в $\otimes_{i \in I} \mathcal{H}_r(\Omega_i, \mathfrak{B}_i)$.

Тогда $(\alpha_i(x_i))_{i \in I}$ эквивалентно существенно положительному C_0 -семейству в том и только в том случае, если $(\alpha_i(x_i^+))_{i \in I}$ есть C_0 -семейство. В этом случае $\sum_{i \in I} x_i^-(\Omega) < \infty$.

В случае, когда $(m_i)_{i \in I} — семейство положительных мер, из теоремы 4$
вытекает отождествление: $\otimes_{i \in I} \sqrt{m_i} = \sqrt{\prod_{i \in I} m_i}$.

Таким образом, в случае положительных продакт-мер отношение эквивалентности, введенное фон Нейманом в (1), и асимптотическая эквивалентность индуцируют одну и ту же классификацию. Из леммы 3 следует, что если множество I бесконечно, то существует континуум классов эквивалентности C_0 -семейств, которые не содержат ни одного существенно положительного C_0 -семейства (они даже не содержат ни одного C_0 -семейства, слабо эквивалентного (в смысле определения (6.1.1) из (1)) такому C_0 -семейству).

Обозначим через $\mathcal{Y}$ подпространство пространства $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{H}_r(\Omega_i, \mathfrak{B}_i)$, порожденное всеми неполными тензорными произведениями, соответствующими классам эквивалентности $\mathfrak{G}$, не содержащими ни одного существенно положительного C_0 -семейства. Обозначим через $\mathcal{H}^\perp$ подпространство пространства $\mathcal{H}_r(\prod_{i \in I} \Omega_i; \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i)$, порожденное образами мер, ортогональных ко всем продакт-мерам.

Теорема 5. *Существует точная последовательность*

$$0 \rightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{J} \bigotimes_{i \in I} \mathcal{H}_r(\Omega_i, \mathfrak{B}_i) \xrightarrow{U} \mathcal{H}_r(\prod_{i \in I} \Omega_i; \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i) \xrightarrow{P} \mathcal{H}^\perp \rightarrow 0,$$

где J и P означают естественные вложение и проекцию соответственно, а U характеризуется тем, что его сужения на неполные тензорные произведения, соответствующие существенно положительным классам эквивалентности $\mathfrak{G}^+$, совпадают с отображениями $U_{\mathfrak{G}^+}$, определенными в теореме 1.

Рассмотрим в заключение следующий пример.

Пусть Ω_i — счетное множество, при каждом $i \in I$ (I счетное) имеющее дискретную измеримую структуру. Тогда $\mathfrak{M}_R(\Omega_i) = l_R^1(\Omega_i)$ (пространство последовательностей вещественных чисел $(x_v)_{v \in I}$ таких, что $\sum_{v \in N} |x_v| < \infty$),

а $\mathcal{H}_r(\Omega_i)$, как легко видеть, есть $l_R^2(\Omega_i)$ (пространство вещественных последовательностей $(y_v)_{v \in \Omega_i}$ таких, что $\sum_{v \in \Omega_i} |y_v|^2 < \infty$). Каждая неполная компонента тензорного произведения $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{H}_r(\Omega_i)$ изоморфна (вещественному)

пространству Фока (см. ^(3, 4) и лемму (4.1.2) из ⁽¹⁾); при этом пространство $\mathcal{H}_r(\prod_{i \in I} \Omega_i)$ представляет собой факторизуемое тензорное произведение

в смысле Араки (см. ⁽⁵⁾).

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
3 XII 1973

Лаборатория кибернетики
Национального совета исследований
Арко Феличе, Неаполь, Италия

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. von Neumann, On Infinite Direct Products. Coll. Works, v. 3, 1959, p. 323.
² S. Kakutani, Ann. Math., t. 49 (1948). ³ Ф. А. Березин, УМН, т. 25, в. 4 (1969).
⁴ Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования, «Наука», 1965. ⁵ K. R. Parthasarathy, K. Schmidt, Lect. Notes in Math., 1972, p. 272. ⁶ A. Guichardet, ibid., p. 261.
⁷ И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, т. 1, «Наука», 1971.