Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 1

УДК 519.95 *МАТЕМАТИКА*

Б. А. РЯБОВ, Г. П. САЧКОВ

О ГРУБОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 7 I 1974)

При выполнении условий абсолютной инвариантности в «грубых» по А. А. Андронову динамических системах устойчивость системы не нарушается, если условия инвариантности выполнены неточно. Исследование «грубости» линейной системы с постоянными параметрами дано в [1, 2].

В настоящей работе рассматривается свойство грубости «в малом» и в «большом» [3] инвариантных линейных стационарных и нестационарных систем с одной и многими нелинейностями заданного класса. А именно, пусть при выполнении условий инвариантности уравнения движения динамической системы в форме Коши имеют вид

$$\dot{x}=Ax+b\varphi(\sigma)+Cf(t); \qquad (1)$$

$$\sigma=c^{\mathrm{T}}x;$$

где $A=\|a_{ij}\|_1^n$ — постоянная устойчивая матрица размера $n\times n$, $C=\operatorname{diag}\{c_{11},\ldots,c_{nn}\}$ — постоянная матрица, постоянные столбцы $b^{\mathrm{T}}=(b_1, b_2,\ldots,b_n)$, $c^{\mathrm{T}}=(c_1, c_2,\ldots,c_n)$, $\varphi(\sigma)$ — нелинейная кусочно-непрерывная функция, $\varphi(0)=0$, столбцы x, $f(t)$ размера $n\times 1$ соответственно фазовые координаты и ограниченные по модулю возмущения, $|f_i(t)|\leqslant m$, $i=1,\ldots,n$, а «т» означает транспонирование.

При отсутствии возмущения $f(t)=0$ и нелинейности, принадлежащей углу $[0, k]$: $0\leqslant\sigma\varphi(\sigma)\leqslant k\sigma^2$, k — конечное положительное число, выполнение, например, неравенства В. М. Попова обеспечивает для системы (1) асимптотическую устойчивость в целом и существование функции Ляпунова вида [4]

$$V=L(x)+\beta\int_0^\sigma\varphi(\sigma)\,d\sigma; \qquad (2)$$

где $L(x)=x^{\mathrm{T}}Lx$, $L=\|l_{ij}\|_1^n$ — постоянная симметричная положительная матрица, β — действительная константа, а элементы l_{ij}, $i, j=1, 2,\ldots,n$, определяемые оператором Ляпунова, зависят от постоянных параметров a_{ij}, $i, j=1,\ldots,n$, линейной части системы и фиксированных числовых коэффициентов n_{ij}, $i, j=1, 2,\ldots,n$, $N=\|n_{ij}\|_1^n>0$.

Таким образом, неравенство В. М. Попова, полагаемое в дальнейшем выполненным, определяет в пространстве параметров системы некоторую область $G_1\subset G_*$, где G_* — наибольшая область, внутри которой имеет место абсолютная устойчивость в угле $[0, k]$.

Система (1) будет грубой «в малом», если малые отклонения от условий инвариантности не нарушают ее устойчивости, так что для любого малого $r>0$ будет существовать такое $\rho(r)>0$, при котором из $\|x(0)\|<\rho$ следует $\|x(t)\|<r$, $t\in[0,\infty)$, а $|\psi_i(x, t)|\leqslant\eta(r)$, $i=1,\ldots,n$; $\|x\|<r$, $t\geqslant 0$, $\eta>0$, где столбец ψ с элементами ψ_i, $i=1,\ldots,n$, в правой части системы (1) обусловлен неточным выполнением условий инвариантности. Покажем, каким образом для произвольного $r>0$ можно подобрать соответствующие числа $\rho(r)>0$ и $\eta(r)>0$, обеспечивающие «грубость» динамической системы (1).

Действительно, пусть на сфере $\|x\|=r$ минимальное значение функции Ляпунова $V(x)$ вида (2) равно $V_->0$. Тогда в силу непрерывности функции $V(x)$ и, так как $V(0)=0$, существует такое положительное число $\rho>0$, что $V(x)<V_-$ в области $\|x\|<\rho$.

Полагаемая знакоопределенной полная производная $\dot{V}$ в силу уравнений (1) при $f(t)=0$

$$\dot{V}=-x^{\mathsf T}Nx+\varphi(\sigma)x^{\mathsf T}(2Lb+\beta A^{\mathsf T}c)+\varphi^2(\sigma)\beta b^{\mathsf T}c \tag{3}$$

и достигает по теореме Вейерштрасса на кольцеобразном множестве S: $\rho\leqslant|x|\leqslant r$ своего максимального значения $-\mu<0$. Если известно, что этот максимум достигается в точке сферы радиуса r_*, то при соответствующей нормировке x определение μ сводится к нахождению на единичной сфере условного экстремума квадратичной формы с матрицей $M=\|m_{ij}\|_1^n$, получаемой из выражения $-\dot{V}$ (3) заменой $\varphi(\sigma)$ на $k_*\sigma$, $0\leqslant k_*\leqslant k$. При этом произведение $c(r_*)\cdot\mu$, где $c(r_*)$ — положительная постоянная нормировки, совпадает с наименьшим корнем характеристического уравнения $|M-\lambda E|=0$, а значение k_* выбирается из условия $\lambda(k_*)=\min\limits_{k_*\in[0,\,k]}\lambda$.

Через найденную таким образом величину $\mu>0$ определим допустимое отклонение от условий инвариантности. Для этого заметим, что функции

$$\frac{\partial}{\partial x_i}V=2\sum_{j=1}^{n}l_{ij}x_j+\beta\varphi(\sigma)c_i,\qquad i=1,\ldots,h,$$

являющиеся непрерывными на множестве S, ограничены сверху. Введем обозначения: $l_*=\max|l_{ij}|$; $c_*=\max|c_i|$; $m_*=m\cdot\max|c_{ii}|$, $i=1,\ldots,n$, $0<c_0<1$, причем c_0 достаточно мало отличается от единицы. Тогда при выполнении неравенства $c_0\mu>m_*nl$ величина $\eta(r)$ может быть принята равной

$$\left(\frac{c_0}{nl}\mu-m_*\right),\qquad l=nr(2l_*+|\beta|kc_*^2)\geqslant\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}V\right\|.$$

Действительно, рассмотрим траекторию системы (1) при неточном выполнении условий инвариантности, начинающуюся в момент $t=0$ в точке $x(0)$ области $\|x\|<\rho$, и допустим, что эта траектория попадает в S. В этом случае для некоторого $t>0$ справедливы неравенства

$$(Ax+b\varphi(\sigma)+Cf(t)+\psi)\cdot\operatorname{grad}V\leqslant-\mu+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}V\right|\cdot|c_{ii}f_i+\psi_i|\leqslant-\mu+c_0\mu<0. \tag{4}$$

Следовательно, $V(x)$ убывает вдоль каждой траектории и поэтому ни одна из траекторий, начавшихся в области $\|x\|<\rho$, не сможет достичь сферы $\|x\|=r$, что и доказывает сохранение устойчивости системы.

Выбирая в области параметров G_1 точку, доставляющую величине μ наибольшее значение, можно допустить и не обязательно малые отклонения параметров. В практических задачах обычно ограничиваются заданной степенью приближения к желаемому движению системы, фиксируя $r=r_0$, чем и определяется в пространстве параметров подобласть G_2, в которой имеет место грубость «в большом» [3].

Свойство грубости «в малом» сохраняется и для систем более общего вида, а именно, для нестационарных инвариантных систем с многими нелинейностями

$$\begin{gathered}\dot{x}=Fx+G\chi(y)+Cf(t),\\ y=Hx,\end{gathered} \tag{5}$$

где переменные матрицы F, G, H, $\dot{H}$ размера $n\times n$ ограничены, столбец $\chi(y)$ нелинейных функций размера $n\times 1$, а остальные обозначения совпадают с (1). Предполагается, что матрица $F-\lambda_0 E$, где $\lambda_0<0$ — некоторое действительное число, асимптотически экспоненциально устойчива, а нелинейности удовлетворяют неравенству

$$\chi_i(y_i)y_i\leqslant k_i y_i^2, \tag{6}$$

где суммирование по индексу i от 1 до n, постоянные $k_i>0$, $i=1,\ldots,n$.

Пусть для системы (5) выполнен критерий ковариантности ([5]), сводящийся к критерию В. М. Попова для случая одной нелинейности. Это означает, что некоторое матричное уравнение Риккати имеет вполне определенное решение и для системы (5) существует функция Ляпунова $V(x)$ вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности». При этом матрица $P(t)$ квадратичной формы удовлетворяет неравенству

$$\alpha_1 E\leqslant P(t)\leqslant\alpha_2 E,\qquad P=P^{\mathrm{T}},\quad t\in[0,\infty), \tag{7}$$

где α_1, α_2 — положительные постоянные, а для любых вогнутых вверх, а также монотонных нелинейностей выполняется неравенство

$$\dot{V}\leqslant 2\lambda_0 V. \tag{8}$$

Последние два неравенства позволяют получить равномерные по времени t оценки функции Ляпунова $V(x)$ и ее производной $\dot{V}(x)$ и тем самым свести доказательство грубости системы (5) к рассмотренному стационарному случаю. В частности, при $\chi(y)=0$ имеет место свойство грубости для инвариантной линейной нестационарной системы.

Таким образом, динамические системы, для которых при выполнении условий инвариантности функция Ляпунова и ее полная производная удовлетворяют неравенствам вида (7) и (8), необходимо являются грубыми «в малом». При этом всегда, в силу указанных условий и неравенств, существуют конечные границы изменений параметров, которые могут обеспечить грубость «в большом», если реальные отклонения от номинальных значений параметров не превышают эти границы.

Проведенное рассмотрение позволяет установить связь и общность между свойством грубости динамической системы и свойством ее устойчивости при постоянно действующих возмущениях ([6]).

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
14 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б. Н. Петров,* Сборн. Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах, 1959. [2] Современные методы проектирования систем автоматического управления, Раздел I, 1967. [3] *Б. А. Рябов, Г. П. Сачков,* Автоматика и телемеханика, № 11 (1972). [4] *М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер,* Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд. АН СССР, 1963. [5] *Б. Д. О. Андерсон, Дж. Б. Мур,* Автоматика и телемеханика, № 5 (1972). [6] *И. Г. Малкин,* Теория устойчивости движения, «Наука», 1966.