

Академик И. Н. ВЕКУА

## ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТЕОРИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Работа посвящена классической проблеме Плато о построении минимальной поверхности, погруженной в трехмерное евклидово пространство и имеющей заданную границу  $L$ , состоящую из  $m+1$  простых замкнутых гладких кривых  $L_0, L_1, \dots, L_m$ . Предположим, что существует по крайней мере одна quadriруемая  $(m+1)$ -связная поверхность, границей которой является  $L$ . Тогда может быть поставлена

Проблема Р. Построить  $(m+1)$ -связную минимальную поверхность, которая имеет контур  $L$  своей границей \*.

Радиус-вектор  $x(z)$  искомой поверхности удовлетворяет условиям <sup>(3)</sup>

$$x(z) = x_j(x, y) e_j, \quad (\partial_z x)^2 = \partial_z x_j \partial_z x_j = 0, \quad (1)$$

где индекс суммирования пробегает значения 1, 2, 3,  $e_j$  — орты осей декартовых координат  $x_j = x_j(x, y)$ , которые являются вещественными гармоническими функциями вещественных переменных  $x, y$ ;  $z = x + iy$ ,  $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ .

Введем еще в рассмотрение изотропные орты  $e = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2)$ ,  $\bar{e} = \frac{1}{2}(e_1 + ie_2)$ .

Будем предполагать, что комплексная переменная  $z$  изменяется в некоторой  $(m+1)$ -связной области  $D$ . Так как при конформных преобразованиях переменной  $z$  формула (1) сохраняет свой вид, то в качестве  $D$  можно взять любую представитель класса конформно эквивалентных  $(m+1)$ -связных областей. Будем считать, что граница  $\Gamma$  области  $D$  состоит из окружностей  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ , причем  $\Gamma_0$  — единичная окружность  $|z| = 1$ ,  $\Gamma_1$  — концентрическая окружность  $r_1 < |z| < 1$ , а  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_m$  — окружности, расположенные внутри кольца  $0 < r_1 < |z| < 1$ . Пусть  $c_j = a_j + ib_j$  и  $r_j$  обозначают соответственно центр и радиус окружности  $\Gamma_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ;  $c_0 = c_1 = 0$ ,  $r_0 = 1$ . Значения параметров  $a_k, b_k, r_{k-1}$ ,  $k > 1$ , вообще говоря, нельзя заранее фиксировать.

Назовем комплекснозначную функцию  $\alpha(t)$  гомоморфизмом  $\Gamma$ , если она реализует непрерывное отображение  $\Gamma$  на себя, причем если  $t \in \Gamma_j$ , то  $\alpha(t) \in \Gamma_j$  и  $\alpha(\Gamma_j) = \Gamma_j$ . Множество таких функций обозначим через  $\mathfrak{R}(\Gamma)$ .

Пусть  $R(t)$  — вектор-функция точки  $t$  контура  $\Gamma$ , реализующая топологическое отображение  $\Gamma \leftrightarrow L$ . Назовем  $R(t)$  нормальным уравнением контура  $L$ . Если  $\alpha(t) \in \mathfrak{R}(\Gamma)$ , то вектор  $R_\alpha(t) = R[\alpha(t)]$  будем рассматривать также как уравнение  $L$ .

Пусть существует гомоморфизм  $\alpha(t) \in \mathfrak{R}(\Gamma)$ , для которого искомая вектор-функция  $x(z)$  выражается формулой

$$x(z) = \int_{\Gamma} R[\alpha(t)] \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_t} ds_t \quad (2)$$

\* Подробные библиографические сведения о проблеме Плато и других свойствах минимальных поверхностей можно найти в <sup>(1-3)</sup>.

и удовлетворяет условию

$$(\partial_z x)^2 = \left( \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Gamma} R[\alpha(t)] \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_t} ds_t \right)^2 = 0, \quad z \in D; \quad (3)$$

здесь  $G(z, t)$ -функция Грина области  $D$  для задачи Дирихле <sup>(3)</sup>. Разумеется, надо обеспечить также положительную определенность метрической квадратичной формы  $ds^2 = \Lambda dz d\bar{z}$ ,  $\Lambda = 2\partial_z x \partial_{\bar{z}} x > 0$ .

Для исследования этой сугубо нелинейной задачи привлечем методы нелинейного функционального анализа. Заранее заметим, что в дальнейшем все банаховы пространства и линейные в них операторы рассматриваются над полем вещественных чисел. Через  $C_{k+v}(\Gamma)$  и  $\tilde{C}_{k+v}(\Gamma)$  будем обозначать соответственно банаховы пространства комплекснозначных и вещественных функций точки  $t$  контура  $\Gamma$ , принадлежащих классу  $C_{k+v}$ ,  $k$  целое,  $k \geq 0$ ,  $0 < v < 1$ .

Пусть компоненты вектор-функции  $R(t)$  принадлежат классу  $\tilde{C}_{k+2+v}(\Gamma)$ . Множество таких функций составляет банахово пространство, которое обозначим через  $C_{k+2+v}(\Gamma)$ . Пусть  $H_{k+v}(D)$  — банахово пространство, элементами которого являются голоморфные в  $D$  функции класса  $C_{k+v}(\bar{D})$ . Введем, наконец, еще декартово произведение  $E_{k,v}(\Gamma) = C_{k+2+v}(\Gamma) \times \tilde{C}_{k+1+v}(\Gamma)$ , элементами которого являются пары  $e = (R, \sigma)$ , где  $R \in C_{k+2+v}(\Gamma)$ ,  $\sigma \in \tilde{C}_{k+1+v}(\Gamma)$ . Норму элемента  $E_{k,v}(\Gamma)$  определим по формуле  $\|e\| = \|R\| + \|\sigma\|$ .

Искомый гомоморфизм  $\alpha(t)$  контура  $\Gamma$  можно представить в виде

$$\alpha(t) = c(t) + r(t) \exp \{ i\sigma(t) + ip(t) \arg(t - c(t)) \}, \quad t \in \Gamma,$$

где  $c(t)$ ,  $r(t)$ ,  $p(t)$  — кусочно-постоянные функции:  $c(t) = c_j$ ,  $r(t) = r_j$ ,  $p(t) = p_j$ , если  $t \in \Gamma_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , причем  $p_0 = 0$ , а  $p_1, \dots, p_m$  — произвольные целые числа,  $\sigma(t) \in \tilde{C}_{k+1+v}(\Gamma)$ .

Левая часть равенства (3) представляет оператор  $\Phi(e)$ , зависящий от элементов  $e = (R, \sigma)$  пространства  $E_{k,v}(\Gamma)$ . Используя известные свойства интеграла типа Коши <sup>(4)</sup>, можно доказать, что оператор  $\Phi(e)$  реализует отображение  $E_{k,v}(\Gamma) \rightarrow H_{k+v}(D)$ .

Сильная производная оператора  $\Phi(e)$  в фиксированной точке  $e_0 = (R_0, \sigma_0)$  выражается в виде <sup>(5)</sup>

$$\begin{aligned} \Phi'(e_0)f = & 2 \int_{\Gamma} R_0(\alpha_0) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial G(z, t)}{\partial n} ds \int_{\Gamma} \{ R(t) + \\ & + iR'_0(\alpha_0) (\alpha_0 - c(t)) \sigma(t) \} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial G(z, t)}{\partial n} ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\alpha_0 = c(t) + r(t) \exp \{ i\sigma_0(t) + ip(t) \arg(t - c(t)) \}$ ,  $R'_0(t) dt = dR_0(t)$ .

Оператор  $\Phi'(e_0)f$  линеен относительно  $f$  и непрерывно зависит от  $\sigma_0$ . Так как  $R'_0(t) \in C_{k+1+v}(\Gamma)$ , то из (4) следует, что  $\Phi'(e_0)f$  реализует отображение  $E_{k,v}(\Gamma) \rightarrow H_{k+v}(D)$ . Нам необходимо изучить обратимость оператора  $\Phi'(e_0)f$ . Ниже мы ограничимся рассмотрением случая односвязной области ( $m=0$ ). В этом случае искомый гомоморфизм представляется в форме  $\alpha(t) = te^{i\sigma(t)}$ .

Пусть  $\tilde{e}_0 = (R_0, 0)$ , где  $\tilde{R}_0(t) = \omega(t)e + \overline{\omega(t)\bar{e}}$ ; здесь  $\omega(z)$  — голоморфная в  $D$  функция класса  $C_{k+2+v}(\bar{D})$ , реализующая конформное отображение круга  $D: |z| < 1$  на некоторую односвязную область  $\bar{D}$ , уравнение  $\tilde{R}_0(t)$  контура  $\tilde{\Gamma}$  которой принадлежит  $C_{k+2+v}(\Gamma)$ . Имеем:  $Af = (2\omega'(z))^{-1} \Phi'(\tilde{e}_0)f = \partial_z \bar{w}$ , где

$$w(z) = \int_{\Gamma} [x(t) + i\omega'(t)t\sigma(t)] \frac{\partial G(z, t)}{\partial n} ds; \quad (5)$$

здесь  $x(t) = x_1(t) + ix_2(t) = eR(t)$ . Так как по условию  $x(t)$ ,  $\omega'(t)$  и  $\sigma(t) \in C_{k+1+\nu}(\Gamma)$ , то гармоническая функция  $w(z) \in C_{k+1+\nu}(D)$ . Если учесть, что  $\omega'(z) \neq 0$  в  $D$  то, очевидно  $Af \in H_{k+\nu}(D)$ . Изучим теперь вопрос существования обратного оператора  $A^{-1}$ .

Имеем:  $\partial \bar{z}(w - T\bar{A}f) = 0$ , где

$$Tg = -\pi^{-1} \iint_D (\zeta - z)^{-1} g(\zeta) d\bar{\zeta} d\eta. \quad (6)$$

Это означает, что функция  $\varphi(z) = w - T\bar{A}f$  голоморфна в  $D$ . Поэтому на  $\Gamma$  выполняется условие  $(w - T\bar{A}f)^+ = x(t) + i\omega'(t)t\sigma(t) - T\bar{A}f = \varphi^+(t)$ ,  $t \in \Gamma$ . Отсюда  $i\sigma(t) = (\varphi^+ + T\bar{A}f - x(t))(t\omega'(t))^{-1}$  и, следовательно, для  $\varphi$  имеем краевую задачу Римана — Гильберта вида

$$\operatorname{Re} [(t\omega'(t))^{-1}\varphi^+(t)] = \operatorname{Re} [(x(t) - T\bar{A}f)(t\omega'(t))^{-1}], \quad t \in \Gamma. \quad (7)$$

Для последней краевой задачи индекс  $n=1$  и согласно известной теореме <sup>(6)</sup> неоднородная задача (7) всегда разрешима, а соответствующая однородная задача имеет три линейно независимых решения. Поэтому  $\sigma(t) = A_0 + A_1 \cos \vartheta + A_2 \sin \vartheta + \sigma_0(t)$ ,  $t = e^{i\vartheta}$ , где  $A_j$  — произвольные вещественные постоянные, а  $\sigma_0$  линейно зависит от  $x(t) = eR(t)$  и  $T\bar{A}f$ .

Если подчиним искомую функцию  $\sigma$  условиям

$$\int_{\Gamma} \sigma d\vartheta = \int_{\Gamma} \sigma \cos \vartheta d\vartheta = \int_{\Gamma} \sigma \sin \vartheta d\vartheta = 0, \quad (8)$$

то будем иметь  $\sigma_0(t) = SR + S_1 Af$ , где  $S$  и  $S_1$  — линейные операторы, реализующие отображения

$$C_{k+2+\nu}(\Gamma) \rightarrow \hat{C}_{k+1+\nu}^{(0)}(\Gamma), \quad H_{k+\nu}(D) \rightarrow \hat{C}_{k+1+\nu}^{(0)}(\Gamma)$$

соответственно; здесь  $\hat{C}_{k+1+\nu}^{(0)}(\Gamma)$  пространство, состоящее из элементов

$$\hat{C}_{k+1+\nu}(\Gamma), \text{ удовлетворяющих условиям (8). Обозначим через } E_{k,\nu}^{(0)}(\Gamma)$$

декартово произведение

$$C_{k+2+\nu}(\Gamma) \times \hat{C}_{k+1+\nu}^{(0)}(\Gamma).$$

Если  $\tilde{R}(t) = g(t)e + \overline{g(t)}\bar{e} + x_3(t)e_3$ , где  $g(t)$  выражает граничные значения гомоморфной в  $D$  функции, а  $x_3(t)$  — вещественная функция. Тогда из (7) и (8) легко следует, что  $Af$  вовсе не зависит от  $\tilde{R}$ . Это означает, что  $S\tilde{R} = 0$ . В частности  $S\tilde{R}_0 = 0$ , где  $\tilde{R}_0(t) = \omega(t)e + \bar{\omega(t)}\bar{e} \in M(\Gamma)$ .

Таким образом, если  $f = (R, SR + S_1 h)$ , где  $R \in C_{k+2+\nu}(\Gamma)$  и  $h \in H_{k+\nu}(D)$ , то имеем тождество  $h = Af$ . Следовательно, при  $h=0$  имеем элементы вида  $\tilde{f} = (R, SR)$ , которые составляют многообразие  $\tilde{E}_{k,\nu}^{(0)}(\Gamma)$  решений уравнения  $Af=0$ . Оно является подпространством  $E_{k,\nu}^{(0)}(\Gamma)$ . Так как  $S\tilde{R}_0=0$ , то, очевидно,  $\tilde{e} = (\tilde{R}_0, 0) \in \tilde{E}_{k,\nu}^{(0)}(\Gamma)$ . Но всякий элемент  $e = (R, \sigma) \in E_{k,\nu}^{(0)}(\Gamma)$  выражается в виде суммы:  $e = (R, SR) + (0, \sigma - SR)$ , где, очевидно,  $\sigma - SR \in \tilde{C}_{k+1+\nu}^{(0)}(\Gamma)$ . Поэтому  $E_{k,\nu}^{(0)}(\Gamma)$  представляет прямую сумму  $\tilde{E}_{k,\nu}^{(0)}(\Gamma) \dot{+} \hat{E}_{k,\nu}^{(0)}(\Gamma)$ , где  $\hat{E}_{k,\nu}^{(0)}(\Gamma)$  состоит из элементов вида  $\hat{e} = (0, \sigma)$ ,  $\sigma \in \hat{C}_{k+1+\nu}^{(0)}(\Gamma)$ .

Таким образом, в любой фиксированной точке вида  $\tilde{e}_0 = (\tilde{R}_0, 0)$  выполняются следующие условия: 1)  $\Phi(\tilde{e}_0) = 0$ ; 2) оператор  $Af =$

$= (2\omega'(z))^{-1} \Phi'(\tilde{z}_0) f$  реализует отображение  $E_{k,v}^{(0)}(\Gamma)$  на все пространство  $H_{k+v}(D)$ , причем существует обратный оператор  $A^{-1}$ , осуществляющий топологическое отображение  $H_{k+v}(D) \leftrightarrow \hat{C}_{k+1+v}^{(0)}(\Gamma)$ ; 3) решения уравнения  $\Phi'(\tilde{z}_0) f = 0$  составляют подпространство  $E_{k,v}^{(0)}(\Gamma)$  пространства  $E_{k,v}^{(0)}(\Gamma)$ , 4)  $E_{k,v}^{(1)}(\Gamma) = E_{k,v}^{(0)}(\Gamma) + \hat{E}_{k,v}^{(0)}(\Gamma)$ .

Любой элемент  $e = (R, \sigma) \in E_{k,v}^{(0)}(\Gamma)$  представляется единственным образом в виде  $e = \tilde{e} + \hat{e}$ , где  $\tilde{e} = (R, SR) \in \tilde{E}_{k,v}^{(0)}(\Gamma)$ ,  $\hat{e} = (0, \sigma - SR) \in \hat{E}_{k,v}^{(0)}(\Gamma)$ . Поэтому уравнение  $\Phi(e) = 0$  записывается в форме  $\Phi(\tilde{e} + \hat{e}) = 0$ ; оно выполняется при  $\tilde{e} = \tilde{e}_0$ ,  $\hat{e} = 0$ .

Согласно известной теореме о неявных функциях в пространствах Банаха <sup>(5)</sup>, справедлива

**Теорема.** Пусть уравнение  $R(t)$  простого замкнутого контура  $L$  принадлежит  $C_{k+2+v}(\Gamma)$ . Пусть  $\tilde{R}_0(t) = \omega(t)e + \omega(t)\bar{e}$ , где  $\omega(z) \in H_{k+2+v}(D)$  и реализует конформное отображение области  $D$ .

Тогда существуют два положительных числа  $\varepsilon$ ,  $\eta$  и непрерывны оператор  $\sigma(t) = \psi(R)$ ,  $\psi(\tilde{R}_0) = 0$ , реализующий топологическое отображение сферы  $\Sigma_\varepsilon$ :  $\|R - \tilde{R}_0\| \leq \varepsilon$  пространства  $C_{k+2+v}(\Gamma)$  в сферу  $\Sigma_\eta^{(0)}$ :  $\|\sigma\| \leq \eta$  пространства  $\hat{C}_{k+1+v}^{(0)}(\Gamma)$ , причем  $\alpha(t) = te^{i\sigma(t)}$  — искомый гомоморфизм, и, следовательно, формула (3) выражает минимальную поверхность, границей которой является кривая  $L$ .

Полученное решение задачи Плато, вообще говоря, может не удовлетворять условию регулярности  $\Lambda = 2\partial_x x \partial_{\bar{x}} x > 0$ . Но это условие можно обеспечить, если в достаточной мере сузим сферы  $\Sigma_\varepsilon$  и  $\Sigma_\eta^{(0)}$ . Пусть  $\Omega(e) = \Lambda$ . Очевидно,  $\Omega(e)$  — непрерывный положительный оператор пространства  $E_{k,v}^{(0)}(\Gamma)$ . Если  $e = \tilde{e}_0 = (\tilde{R}_0, 0)$ , то  $\Omega(\tilde{e}_0) = |\omega'(z)|^2 \geq K_\omega > 0$ , где  $K_\omega$  — положительная постоянная. В силу непрерывности оператора  $\Omega(e)$  для всякой положительной постоянной  $\beta < 1$  существуют положительные постоянные  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$  и  $\eta_1 \leq \eta$  такие, что выполняется неравенство  $\|\Omega(e) - \Omega(\tilde{e}_0)\| < (1 - \beta)K_\omega$ , если  $R(t) \in \Sigma_{\varepsilon_1}$  и  $\sigma(t) \in \Sigma_{\eta_1}^{(0)}$ .

Поэтому  $\Omega(e) \geq \Omega(\tilde{e}_0) - \|\Omega(e) - \Omega(\tilde{e}_0)\| \geq K_\omega - (1 - \beta)K_\omega = \beta K_\omega > 0$ , если  $e = (R, \sigma) \in \Sigma_{\varepsilon_1} \times \Sigma_{\eta_1}^{(0)}$ , что и требовалось доказать.

Из формулы (3) вытекает, что радиус-вектор  $x(z)$  минимальной поверхности, имеющей границей контур  $L$  класса  $C_{k+2+v}(\Gamma)$ , принадлежит классу  $C_{k+1+v}(\bar{D})$  в замкнутой области  $\bar{D}$ .

Институт прикладной математики  
Тбилисского государственного университета

Поступило  
11 III 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> J. C. C. Nitsche, Bull. Amer. Math. Soc., v. 71, № 2 (1965). <sup>2</sup> Р. Оссерман, УМН, т. 22, в. 4 (136) (1967). <sup>3</sup> Р. Курант, Принцип Дирихле III<sup>9</sup>, Конформные отображения и минимальные поверхности, М., 1953. <sup>4</sup> Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. <sup>5</sup> Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М., 1951. <sup>6</sup> И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959.