

М. И. СТЕСИН

**ОБ АЛЕКСАНДРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКАХ ШАРОВ**

(Представлено академиком П. С. Александровым 3 I 1974)

1. Пусть  $C$  — множество в банаховом пространстве  $X$ .

Под  $n$ -мерным поперечником множества  $C$  по Александру понимают следующую величину:

$$a_n(C, X) = \inf_{(K_n, F)} \sup_{x \in C} \|x - Fx\|,$$

где нижняя грань берется по всевозможным парам  $(K_n, F)$ , в которых  $K_n$  —  $n$ -мерный компакт в  $X$ ,  $F$  — непрерывное отображение  $C$  в  $K_n$ . Если  $C$  — симметричное относительно нуля множество и нижняя грань берется по тем парам  $(K_n, F)$ , в которых  $F$  — непрерывное нечетное отображение  $C$  в  $n$ -мерный компакт  $K_n$ , то соответствующая величина, которую мы обозначим через  $\tilde{a}_n(C, X)$ , называется нечетным  $n$ -мерным поперечником множества  $C$  по Александру.

Под  $n$ -мерным поперечником множества  $C$  по Бернштейну понимают величину

$$b_n(C, X) = \sup_{(L_{n+1}, z)} \sup_{\varepsilon > 0} \{C \supset z + \varepsilon B \cap L_{n+1}\},$$

где элементами пары  $(L_{n+1}, z)$  являются  $L_{n+1}$  — произвольное  $(n+1)$ -мерное подпространство  $X$  и  $z$  — произвольный элемент  $X$ , а  $B$  — единичный шар пространства  $X$ .

В случае компактного множества  $C$  величину

$$u_n(C, X) = \inf_{V_{n+1}} \{\text{diam } V_{n+1}\},$$

где  $V_{n+1}$  — открытое покрытие  $C$  кратности  $n+1$ , называют  $n$ -мерным поперечником множества  $C$  по Урысону.

Для ограниченного множества  $C \subset X$  величину  $r(C, X) = \inf_{z \in X} \sup_{x \in C} \|x - z\|$  называют радиусом множества  $C$ . Точку  $x_0 \in X$  такую, что  $\sup_{x \in C} \|x - x_0\| = r(C, X)$ , называют центром множества  $C$ . Заметим, что в конечномерном пространстве  $X$  любое ограниченное множество имеет хотя бы один центр.

Банахово пространство  $X$  называется центрируемым, если:

- 1) любое ограниченное подмножество  $C \subset X$  имеет центр,
- 2) для любого ограниченного подмножества  $C \subset X$  радиус

$$r(C, X) = 1/2 \text{diam } C.$$

Имеет место следующая

**Лемма 1.** Пусть  $X$  — конечномерное банахово пространство,  $L$  — его подпространство. Для того чтобы в  $X$  существовал линейный проектор на  $L$  с нормой 1, необходимо и достаточно, чтобы для любого симплекса  $T \subset L$  существовал центр множества  $T$ , который бы лежал в  $L$ .

При помощи леммы 1, теоремы Йордана – Неймана <sup>(1)</sup> и теоремы Какутани <sup>(2)</sup> доказывается

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — банахово пространство,  $\text{diam } X \geq 3$ . Тогда, если существует такое  $n \geq 2$ , что для любого  $n$ -мерного шара в  $X$  его  $(n-1)$ -мерный поперечник по Александрову равен радиусу этого шара, то  $X$  гильбертово.

2. Теорема 1 показывает, что выполнение при некотором  $n \geq 2$  соотношения  $b_n(C, X) \leq a_n(C, X)$  между поперечниками по Александрову и Бернштейну для любого  $C \subset X$  является критерием гильбертовости пространства  $X$ . В случае произвольного банахова пространства оценка сверху поперечника по Бернштейну через поперечник по Александрову устанавливается следующей теоремой, принадлежащей В. М. Тихомирову.

**Теорема 2** (В. М. Тихомиров). Пусть  $C$  — множество в банаховом пространстве  $X$ . Тогда для любого натурального  $n$   $n$ -поперечники множества  $C$  по Александрову и Бернштейну удовлетворяют неравенству

$$b_n(C, X) \leq 2a_n(C, X). \quad (1)$$

Ниже будет доказано, что неравенство (1) является точным. Для этого нам потребуются следующие утверждения.

**Лемма 2** (В. М. Тихомиров). В центрируемом пространстве  $X$  для любого компакта  $C \subset X$  поперечники множества  $C$  по Александрову и Урысону удовлетворяют равенству

$$u_n(C, X) = 2a_n(C, X).$$

**Лемма 3.** Пусть  $X$  — банахово пространство,  $L_n$  —  $n$ -мерное подпространство  $X$ ,  $T$  —  $n$ -мерный симплекс в  $L_n$ ,  $T_0$  — выпуклая оболочка центров  $k$ -мерных граней  $T$ . Тогда для любого  $\varepsilon < 0$  существует покрытие симплекса  $T$  кратности  $(k+1)$  и диаметра не более, чем  $\text{diam } T_0 + \varepsilon$ .

Рассмотрим пространство  $l_\infty^{n+1}$ , т. е. пространство  $\mathbf{R}^{n+1}$  с нормой  $\|x\| = \max\{|x^{(1)}|, \dots, |x^{(n+1)}|\}$ . Через  $L_n$  обозначим  $n$ -мерную плоскость в  $l_\infty^{n+1}$ , задаваемую уравнением  $\sum_{i=1}^{n+1} x^{(i)} = 0$ . Единичный шар  $L_n$  обозначим через  $C = L_n \cap I^{n+1}$ , где  $I^{n+1}$  —  $(n+1)$ -мерный единичный куб, являющийся единичным шаром  $l_\infty^{n+1}$ .

**Лемма 4.** При  $k > [(n-1)/2]$   $k$ -мерный урысоновский поперечник шара  $C$  удовлетворяет неравенству

$$u_k(C, l_\infty^{n+1}) \leq (n+1)/(k+1).$$

**Доказательство.** Рассмотрим точки  $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ , у которых координаты с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_p$  равны 1, а остальные  $-(p/(n+1-p))$ . При  $p < (n+1)/2$  все точки  $\xi_{i_1, i_2, \dots, i_p}$  принадлежат  $C$ . Через  $\xi_i^*$ ,  $i=1, \dots, n+1$ , обозначим функционалы из  $(l_\infty^{n+1})^*$ , определяемые равенствами  $\langle \xi_i^*, x \rangle = x^{(i)}$ , а через  $T$  —  $n$ -мерный симплекс  $T = \{x \in L_n \mid \langle \xi_i^*, x \rangle \leq 1, i=1, \dots, n+1\}$ . Легко видеть, что  $C \subset T$ . Далее, из соотношения

$$\langle \xi_i^*, \xi_{i_1, \dots, i_p} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ принадлежит набору } (i_1, \dots, i_p), \\ -p/(n+1-p), & \text{если } i \neq i_1, \dots, i_p, \end{cases}$$

следует, что  $\xi_{i_1, \dots, i_p}$  являются центрами  $(n-p)$ -мерных граней симплекса  $T$ . В силу леммы 3 существует покрытие  $T$ , а следовательно, и  $C$  кратности  $n-p+1$  и диаметра не более, чем  $\text{diam}(\text{conv}\{\xi_{i_1, \dots, i_p}\}) + \varepsilon = (n+1)/(n+1-p) + \varepsilon$ . Отсюда следует, что  $u_{n-p}(C, l_\infty^{n+1}) \leq (n+1)/(n+1-p)$ . Полагая  $k = n-p$ , получаем утверждение леммы.

Следующая теорема доказывает точность неравенства В. М. Тихомирова (1).

Теорема 3. Для поперечников по Александрову и Бернштейну имеет место соотношение

$$\sup_n \sup_{(X,C)} \frac{b_n(C, X)}{a_n(C, X)} = 2,$$

где верхняя грань берется по всевозможным парам  $(X, C)$ , в которых  $X$  — банахово пространство,  $C$  — ограниченное подмножество  $X$ .

Доказательство. Учитывая теорему 2, достаточно показать, что  $\sup_n \sup_{(X,C)} \frac{b_n(C, X)}{a_n(C, X)} \geq 2$ . Так как пространство  $l_\infty^{n+1}$  центрируемо, то в силу

леммы 2 из леммы 4 получаем  $a_{n-1}(C, l_\infty^{n+1}) = 1/2 u_{n-1}(C, l_\infty^{n+1}) \leq (n+1)/2n$ ,

а так как  $b_{n-1}(C, l_\infty^{n+1}) = 1$ , то  $\sup_n \sup_{(X,C)} \frac{b_n(C, X)}{a_n(C, X)} \geq \sup_n \frac{2n}{n+1} = 2$ . Теорема

доказана.

3. Так же как и доказательство теоремы 3, на использовании леммы 4 основывается решение одной задачи Л. А. Тумаркина, которая заключается в следующем. Верно ли, что  $k$ -мерные поперечники по Урысону  $n$ -мерного эвклидова шара равны диаметру шара при  $0 \leq k \leq n-2$ ? При этом оказывается, что ответ положителен при  $0 \leq k \leq [(n-1)/2]$  и отрицателен при  $k > [(n-1)/2]$ . Данное утверждение доказывается в теореме 4, для которой нам понадобится

Лемма 5. Пусть  $X$  — банахово пространство,  $C$  — симметричное относительно нуля подмножество  $X$ . Тогда для любого натурального  $n$   $2n$ -мерный нечетный поперечник множества  $C$  по Александрову оценивается сверху  $n$ -мерным александровским поперечником:

$$\check{a}_{2n}(C, X) \leq a_n(C, X).$$

Теорема 4. Пусть  $X$  — банахово пространство,  $L_n$  —  $n$ -мерное подпространство  $X$ ,  $C = B \cap L_n$  — единичный шар подпространства  $L_n$ . Тогда для урысоновских поперечников шара  $C$  справедливы следующие утверждения:

- 1)  $u_k(C, X) = 2$  при  $0 \leq k \leq [(n-1)/2]$ ;
- 2) Если шар  $C$  строго выпуклый, то при  $k > [(n-1)/2]$

$$u_k(C, X) < 2.$$

Доказательство. Первое утверждение настоящей теоремы следует из леммы 5 и того факта, что при  $0 \leq k \leq n-1$   $k$ -мерный нечетный поперечник по Александрову  $n$ -мерного банахова шара равен радиусу шара (см. (3)).

Пусть теперь  $C$  строго выпукло. Легко видеть, что в этом случае  $u_k(C, X) = 2$  тогда и только тогда, когда для любого покрытия шара  $C$  кратности  $k+1$  хотя бы один элемент этого покрытия содержит пару диаметрально противоположных точек сферы  $\partial C$ . Так как любые два  $n$ -мерных шара гомеоморфны, причем отображение, осуществляющее этот гомеоморфизм, всегда можно считать нечетным, то для доказательства второго утверждения достаточно указать какой-нибудь  $n$ -мерный шар, у которого  $([(n-1)/2] + 1)$ -мерный поперечник меньше 2. В силу леммы 4 этим свойством обладает единичный шар  $n$ -мерной плоскости  $L_n$  в пространстве  $l_\infty^{n+1}$ . Теорема доказана.

В заключение автор благодарит В. М. Тихомирова за внимание к работе и полезные обсуждения.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
21 XI 1973

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> P. Jordan, J. von Neumann, Ann. Math. (2), v. 36, 719 (1935). <sup>2</sup> S. Kakutani, Japan. J. Math., v. 16, 93 (1973). <sup>3</sup> М. И. Стесин, УМН, т. 28, 6, 219 (1973).