

Р. М. ТРИГУБ

СВЯЗЬ МЕЖДУ СУММИРУЕМОСТЬЮ И АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТЬЮ РЯДОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

(Представлено академиком С. М. Никольским 7 I 1974)

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия суммируемости рядов Фурье всюду для непрерывных функций и во всех точках Лебега интегрируемых функций. Вопрос о суммируемости оказывается эквивалентным вопросу об абсолютной сходимости некоторых рядов Фурье.

1. $T(x)$ — тригонометрический полином порядка $\leq n$, $x_m = 2m\pi/(2n+1)$.
Теорема 1. Существует абсолютная константа C такая, что

$$\left| T(x) - \frac{T(x_m + tx_1) - T(x_m)}{\sin \pi t} (-1)^m \sin(n + 1/2)x \right| \leq C \sum_{k=-n}^n |T(x_k)| h(|m-k|)$$

для всех $x \in [-\pi, \pi]$ при $m = \left[\frac{1}{2} + \frac{2n+1}{2\pi} x \right]$; $h(p) = \frac{(2n+1)^2}{(2p-1)^2(4n-2p+1)^2}$

Смысл этой теоремы в том, что полином заменяется функцией простой структуры, а именно кусочно-синусоидальной функцией с равноотстоящими точками разрыва.

Отметим, что имеют место аналогичные формулы с правой частью вида

$$C \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n |T'(x_k)| h(|m-k|), \quad C \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n |\bar{T}'(x_k)| h(|m-k|)$$

($\bar{T}(x)$ — сопряженный полином) и др.

2. Указанное преобразование полинома удобно для вычисления его интегральных норм.

Теорема 2. Для любого полинома порядка $\leq n$ ($|\theta| \leq C$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(x)| dx = \frac{8}{(2n+1)^2} \sum_{m=-n}^n |T'(x_m)| + \theta \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n |T(x_k)|.$$

Другие формулы мы здесь не приводим ввиду их громоздкости. Отметим еще, что

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n \max_{|x| \leq x_{k+1}} |T(x)| \leq C \int_{-\pi}^{\pi} |T(x)| dx.$$

Более слабое неравенство, получающееся отсюда заменой максимума модуля на $|T(x_k)|$, хорошо известно (см., например, (4)).

Следствие. Пусть $T_n(x) = \sum_{k=-n}^n \lambda_{n,k} e^{ikh}$ — последовательность по-

линомов. Тогда

$$\sup_n \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x)| dx < \infty \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sup_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n |T_n(x_k)| + \sup_n \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=-n}^n |T_n'(x_k)| < \infty.$$

Этим необходимым и достаточным условиям можно придать другой вид, если ввести последовательность функций $\lambda_n(x)$ с условием $\lambda_n(x_k) = \lambda_{n, k}$, $|k| \leq n$. Тогда (обозначения из (1))

$$\frac{1}{2n+1} T_n(-x_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda_n(x) e^{-(kx)} d\omega_{2n+1} = c_k^{(n)}(\lambda_n)$$

коэффициент Фурье — Лагранжа функции $\lambda_n(x)$. Во второй сумме — модули коэффициентов Фурье — Лагранжа функции $x\lambda_n(x)$.

3. Пусть A — алгебра функций, разлагающихся в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд. В связи с вопросами суммируемости рядов Фурье (см. ниже п. 5) автором ранее (см. (2)) введено и изучено пространство B непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций с нормой

$$\sup_n \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^n f(x_k) e^{ikx} \right| dx.$$

После присоединения единицы в этой банаховой алгебре справедливы обе теоремы Винера (локальная и о структуре максимальных идеалов).

Из результатов п. 2 получаем следующее предложение.

Теорема 3. $f \in B \Leftrightarrow f(x), xf(x) \in A$.

4. «Вычислим» теперь преобразование Фурье финитной выпуклой функции.

Теорема 4. Если $f(x)$ выпукла на $[0, \pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$, то

$$\int_0^{\pi} f(x) e^{-ixy} dx = \frac{e^{-i\pi y} f(\pi - \pi/|y|) - f(\pi/|y|)}{y} i + O\gamma(|y|),$$

где $y \in \mathbb{R}$, $|y| \geq 1$, $|\theta| \leq C$, $\gamma(r)$ убывает и

$$\left| \int_1^{\infty} \gamma(r) dr \right| \leq \max_{[0, \pi]} |f(x)|.$$

Отделяя мнимую часть и полагая y целым, получаем усиление и уточнение одной теоремы Г. Е. Шилова (3).

5. Указанные выше теоремы применимы к вопросу о суммируемости рядов Фурье, так как сходимость (при $n \rightarrow \infty$) линейных полиномиальных средних $\sum_{k=-1}^n \lambda_{n,k} c_k e^{ikx}$, где $\{c_k\}$ — коэффициенты Фурье f , в случае непрерывности функции, как известно, упирается в ограниченность последовательности интегральных норм ядра $T_n(x)$. Определению эффективных достаточных условий такой ограниченности посвящено, особенно после статьи С. М. Никольского (4), много работ (библиографию см., например, в (5)).

Из результатов пп. 2 и 3 следуют необходимые и достаточные условия. Можно указать и разные достаточные признаки, если в качестве $\lambda_n(x)$ выбрать кусочно-линейную непрерывную функцию и применить известные теоремы об абсолютной сходимости.

Отметим еще, что поведение последовательности интегральных норм полиномов (возможный асимптотический рост) важно знать в вопросе о скорости сходимости. Из теоремы 2 просто выводятся результаты работ (6, 7) и (8), теорема 1, доказанные другими методами.

6. Рассмотрим теперь вопрос о суммируемости в точках Лебега. Общие необходимые и достаточные условия, включающие сведения о горбатой мажоранте ядра, указаны Д. К. Фаддеевым (9).

Теорема 5. В обозначениях п. 2

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \max_{u \leq |x| \leq \pi} |T_n(x)| du = \\ & = 2 \sum_{m=0}^n \max_{m \leq |k| \leq n} |c_k^{(n)}(x\lambda_n)| + \theta \sum_{m=0}^n \max_{m \leq |k| \leq n} |c_k^{(n)}(\lambda_n)|, \\ & \int_0^\pi \max_{u \leq |x| \leq \pi} |T_n(x)| du \geq C \sum_{m=1}^n \max_{m \leq |k| \leq n} |c_k^{(n)}(\lambda_n)|. \end{aligned}$$

Отсюда получаются необходимые и достаточные условия в терминах монотонных мажорант модулей коэффициентов Фурье — Лагранжа функций $\lambda_n(x)$ и $x\lambda_n(x)$.

В связи с этим естественно ввести пространство \bar{A} с нормой

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|k| \geq n} |c_k|.$$

Это банахова алгебра с тем же пространством максимальных идеалов, что и в A .

Теорема 6. Для того чтобы метод, порожденный одной непрерывной функцией $\lambda(x)$, $\lambda_{n,k} = \lambda(x_k)$, $|k| \leq n$, суммировал ряд Фурье любой интегрируемой функции к ее значению в точках Лебега, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda(x), \quad x\lambda(x) \in \bar{A}, \quad \lambda(0) = 1.$$

Достаточное условие выражается сходимостью интеграла

$$\int_0^\pi u^{-2} \omega_2(\lambda; u)_L du$$

(модуль гладкости II порядка в метрике L). Ограниченности производной мало.

Достаточные условия, найденные ранее (1, 10, 11), означают квазивыпуклость $\{\lambda_{n,k}\}$ и потому следуют из теорем 5 и 4.

Отметим еще, что разница между двумя случаями суммируемости особенно видна на лакунарных рядах.

7. Приведенные теоремы о полиномах могут быть распространены на некоторые классы целых функций экспоненциального типа. Рассмотрим вопрос об интегрируемости преобразования Фурье финитной функции.

Теорема 7. Пусть \hat{f} — преобразование Фурье функции f с носителем на $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$\hat{f} \in L(-\infty, \infty) \Leftrightarrow f(x), \quad xf(x) \in A.$$

Следствие ⁽¹²⁾. Если носитель f на $[-\pi, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, то

$$\hat{f} \in L(-\infty, \infty) \Leftrightarrow f \in A.$$

Отметим в заключение, что результаты этой работы были доложены автором на двух семинарах отдела теории функций Математического института АН СССР и на семинаре кафедры теории функций и функционального анализа Московского университета.

Донецкий государственный
университет

Поступило
21 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 2, М., 1965. ² Р. М. Тригуб, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, № 1, 24 (1968). ³ Г. Е. Шилов, ДАН, т. 35, 3 (1942). ⁴ С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 2, 259 (1948). ⁵ Р. М. Тригуб, Сборн. Метрические вопросы теории функций и отображений, в. 2, Киев, 1971, стр. 173. ⁶ А. Ф. Тиман, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 11, 263 (1947). ⁷ С. Б. Стечкин, ДАН, т. 75, 165 (1950). ⁸ С. А. Теляковский, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 27, № 2, 253 (1963). ⁹ Д. К. Фаддеев, Матем. сборн., 1 (43), 3, 351 (1936). ¹⁰ B. Sz-Nagy, Acta Sc. Math., Szeged., v. 12, 204 (1950). ¹¹ А. В. Ефимов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 24, 743 (1960). ¹² Н. Винер, Интеграл Фурье и некоторые его приложения, М., 1963.