Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 5

УДК 517.11 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Ю. Л. ЕРШОВ

# О МОДЕЛИ G ТЕОРИИ *BR*

В работе (1) и книге (2) был определен класс G всюду определенных непрерывных функционалов, который образует модель теории бар-рекурсивных функционалов Спектора. Там же указано, как провести доказательство этого утверждения в арифметике второго порядка с классической логикой и аксиомой зависимого выбора. Доказательство состоит в указании элементарного определения класса G в стандартной модели $N_2$ арифметики второго порядка, которое задает интерпретацию $BR$ в указанной теории арифметики.

Замечание. В определении классов $\overline{G}_\sigma$ (в (1) и (2)) условие сохранения эквивалентностей $\sim_{\sigma i}$ является лишним. Оно вытекает из первого условия — всюду определенности.

В работах (6, 7) были построены другие модели теории бар-рекурсивных функционалов, причем оказалось возможным провести доказательства в более интуиционистской теории арифметики второго порядка. В настоящей работе указывается другой путь элементарной определимости G в $N_2$, который позволяет доказать основное утверждение о модели G теми же средствами, что и Лукхардт (6). Отметим, что модель G является значительно более естественной, чем модель Скарпеллини (7), а модель Лукхардта (6) страдает тем недостатком, что функционалы всех типов определяются одновременно (единым обобщенным индуктивным определением).

Укажем теперь основные моменты новой интерпретации. В качестве языка рассматривается язык $L$ монографии (8), с функциональными константами для всех примитивно-рекурсивных функционалов $\varphi(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Здесь $x_i$-переменные, пробегающие натуральные числа, $\alpha_i$ — переменные, пробегающие одноместные числовые функции. Теория $P_2$ — это теория в языке $L$, определенная группами аксиом $A$, $B$, $C$ (без аксиомы выбора *2,1) и $D$ (для всех символов примитивно-рекурсивных функционалов) книги (8). Теория $P_2^*$ получается из $P_2$ добавлением правила $(\mathrm{hs}\,BI)^{00}$ (6) бар-индукции над непустыми специями последовательностей выбора, которое формулируется так. Пусть $S(\alpha)$ — формула языка $L$ с единственной свободной переменной $\alpha$; $A(\alpha, x)$, $B(\alpha, x)$ — формулы с единственными свободными переменными $\alpha$ и $x$. Пусть

$(H0)\ \exists\alpha S(\alpha)$;

$(H1)\ \forall\alpha(\forall x S(\alpha_x)) \to \exists y A(\bar\alpha(y), y)$;

$(H2)\ \forall\alpha\forall x(\forall y{<}x S(\alpha_y) \to A(\bar\alpha(x), x) \vee \neg A(\bar\alpha(x), x))$;

$(H3)\ \forall\alpha\forall x(\forall y{<}x S(\alpha_y) \& A(\bar\alpha(x), x) \to B(\bar\alpha(x), x))$;

$(H4)\ \forall\alpha\forall x(\forall y{<}x S(\alpha_y) \& \forall\beta(S(\beta) \to B(\bar\alpha(x) * \beta, \quad x+1)) \to B(\bar\alpha(x), \quad x))$,

где $\alpha_x = \lambda y\alpha(\langle x, y\rangle)$, а $\sigma = \lambda x 0$.

Тогда $\dfrac{(H1), \ldots, (H4)}{(H0) \to B(\sigma, 0)}$ — $(\mathrm{hs}\,BI)^0$-правило.

Теорема. *λ-Модели функционалов* C *и* G *элементарно определимы в стандартной модели* $N_2$ *арифметики второго порядка.*

Указанное элементарное определение G задает интерпретацию теории $BR$ бар-рекурсивных функционалов Спектора в теории $P_2^*$.

Основные идеи элементарной определимости C в $N_2$:

I. Пусть $X$ — полное $f$-пространство со счетным базисным подпространством $X_0$, $\nu$: $N\to X_0$ — нумерация $X_0$, а $\vartheta(x, y)$ — формула языка $L$ такая, что $N_2\models\vartheta(x, y)\Leftrightarrow\nu(x)\leqslant\nu(y)$, где $\leqslant$ — порядок на $X$, определенный топологией ([2]). Тогда формулы

$$\mathfrak{A}(\alpha)-\forall x\vartheta(\alpha(x), \alpha(x+1));$$
$$\mathfrak{B}(\alpha, \beta)-\mathfrak{C}(\alpha, \beta)\&\mathfrak{C}(\beta, \alpha);$$
$$\mathfrak{C}(\alpha, \beta)-\mathfrak{A}(\alpha)\&\mathfrak{A}(\beta)\&\forall x\exists y\vartheta(\alpha(x), \beta(y)),$$

элементарно определяют модель $\langle X, \leqslant\rangle$ в $N_2$.

II. Пусть $\langle X, \leqslant\rangle$ — полное $f$-пространство, $\langle Y, \leqslant\rangle$ — полное $f_0$-пространство, $\langle Z, \leqslant\rangle=\langle C(X, Y)\leqslant\rangle$; пусть $\nu_0$: $N\to X_0$, $\nu_1$: $N\to Y_0$ — такие нумерации базисных подпространств $X$ и $Y$ соответственно, что предикаты $P_0(x, y)\Leftrightarrow\nu_0(x)\leqslant\nu_0(y)$, $P_1(x, y)\Leftrightarrow\nu_1(x)\leqslant\nu_1(y)$ примитивно-рекурсивны. Тогда существует такая нумерация $\nu_2$: $N\to Z_0$, что предикат $P_2(x, y)\Leftrightarrow\Leftrightarrow\nu_2(x)\leqslant\nu_2(y)$ примитивно-рекурсивен и существует примитивно-рекурсивная двуместная функция $g$ такая, что $[\nu_2(x)](\nu_0(y))=\nu_1 g(x, y)$ для всех $x$ и $y$. В частности, отображение $Ap$: $Z_0\times X_0\to Y_0$ является морфизмом $Ap$: $(Z_0, \nu_2)\times(X_0, \nu_0)\to(Y_0, \nu_1)$. Причем предикат $P_2$ и функция $g$ определяются примитивно-рекурсивно по $P_0$ и $P_1$.

III. Пусть $\langle X, \leqslant\rangle$, $\langle Y, \leqslant\rangle$, $\langle Z, \leqslant\rangle$, $\nu_0$, $\nu_1$ как в п.II. Так как примитивно-рекурсивные предикаты находятся в сигнатуре, то по I существуют элементарные определения $\{\mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X, \mathfrak{C}_X\}$, $\{\mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y, \mathfrak{C}_Y\}$ и $\{\mathfrak{A}_Z, \mathfrak{B}_Z, \mathfrak{C}_Z\}$ моделей $\langle X, \leqslant\rangle$, $\langle Y, \leqslant\rangle$ и $\langle Z, \leqslant\rangle$ соответственно, в $N_2$. Пусть $Ap$: $Z\times X\to Y$ — естественное отображение $Ap(f, x)=f(x)$. Тогда существует примитивно-рекурсивный функционал $A$ (примитивно-рекурсивно зависящий от предикатов $P_0$, $P_1$) такой, что если $\mathfrak{A}_Z(\alpha)$, $\mathfrak{A}_X(\beta)$, то $\mathfrak{A}_Y(A(\alpha, \beta))$ и $A(\alpha, \beta)$ соответствует элементу $Ap(f, x)$ пространства $Y$, где $\alpha$ соответствует $f$, а $\beta$ соответствует $x$. Множество $\{\{\mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X, \mathfrak{C}_X\}, \{\mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y, \mathfrak{C}_Y\}, \{\mathfrak{A}_Z, \mathfrak{B}_Z, \mathfrak{C}_Z\}, A\}$ назовем элементарным определением модели $\langle\langle X, \leqslant\rangle, \langle Y, \leqslant\rangle, \langle C(X, Y)\leqslant \leqslant\rangle, Ap\rangle$.

IV. Пусть $\langle X, \leqslant\rangle$ — полное $f_0$-пространство, $\nu$: $N\to X_0$ — нумерация базисного подпространства $X$ такая, что предикат $P(x, y)\Leftrightarrow\nu(x)\leqslant\nu(y)$ примитивно-рекурсивен. Если $\{\mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X, \mathfrak{C}_X\}$ — элементарное определение $\langle X, \leqslant\rangle$ в $N_2$ в соответствии с I, а $\{\{\mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X, \mathfrak{C}_X\}, \{\mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X, \mathfrak{C}_X\}, \{\mathfrak{A}_{C(X, X)}, \mathfrak{B}_{C(X, X)}, \mathfrak{C}_{C(X, X)}\}, A\}$ — элементарное определение $\langle\langle X, \leqslant\rangle, \langle X, \leqslant\rangle, \langle C(X, X), \leqslant\rangle, Ap\rangle$ в соответствии с III, то существует примитивно-рекурсивный функционал $M$ (примитивно-рекурсивно зависящий от $P$) такой, что

$$\forall\alpha(\mathfrak{A}_{C(X, X)}(\alpha)\to\mathfrak{A}_X(M(\alpha))\&\mathfrak{B}_X(\alpha, A(\alpha, M(\alpha, M(\alpha)))\&.$$
$$\&\forall\beta(\mathfrak{A}_X(\beta)\&\mathfrak{B}_X(\beta, A(\alpha, \beta))\to\mathfrak{C}_X(M(\alpha), \beta))).$$

Другими словами, $M(\alpha)$ соответствует наименьшей неподвижной точке отображения, соответствующего $\alpha$.

V. Пусть $N$ рассматривается как дискретное пространство, $\langle Y, \leqslant\rangle$ — полное $f_0$-пространство $\nu_0=id_N$, $\nu_1$: $N\to Y_0$ — нумерация базисного подпространства $Y$ такая, что предикат $P(x, y)\Leftrightarrow\nu_1(x)\leqslant\nu_1(y)$ примитивно-рекурсивен. Если $\{\{\mathfrak{A}_N, \mathfrak{B}_N, \mathfrak{C}_N\}, \{\mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y, \mathfrak{C}_Y\}, \{\mathfrak{A}_{C(N, Y)}, \mathfrak{B}_{C(N, Y)}, \mathfrak{C}_{C(N, Y)}\}, A\}$ есть элементарное определение $\langle N, \langle Y, \leqslant\rangle, \langle C(N, Y), \leqslant\rangle, Ap\rangle$ в соответствии с III, то существуют примитивно-рекурсивные функционалы $\Phi_0$ и $\Phi_1$ (примитивно-рекурсивно зависящие от $P$) такие, что выполнены условия:

1) $\forall\alpha(\forall x\mathfrak{A}_Y(\alpha_x)\to\mathfrak{A}_{C(N, Y)}(\Phi_0(\alpha)))$;

2) $\forall\alpha(\mathfrak{A}_{C(N, Y)}(\alpha)\to\forall x\mathfrak{A}_Y([\Phi_1(\alpha)]_x))$;

3) $\forall\alpha(\forall x\mathfrak{A}_Y(\alpha_x)\to\forall x\mathfrak{B}_Y(\alpha_x, [\Phi_1, \Phi_0(\alpha)]_x))$;

4) $\forall\alpha(\mathfrak{A}_{C(N, Y)}(\alpha)\to\mathfrak{B}_{C(N, Y)}(\alpha, \Phi_0\Phi_1(\alpha)))$.

Функционалы $\Phi_0$ и $\Phi_1$ устанавливают «взаимно однозначное» соответствие между множеством всех отображений из $N$ в $\widehat{\alpha\mathfrak{A}}_Y(\alpha)$ и множеством $\widehat{\alpha\mathfrak{A}}_{C(N,\,Y)}(\alpha)$.

Пункты I—III позволяют определить последовательность формул $\{\mathfrak{A}_\sigma, \mathfrak{B}_\sigma, \mathfrak{C}_\sigma\}$, $\sigma \in T$, и последовательность примитивно-рекурсивных функционалов $\{A_\sigma\}$, $\sigma \neq 0 \in T$, такие, что $\{\mathfrak{A}_\sigma, \mathfrak{B}_\sigma, \mathfrak{C}_\sigma\}$ элементарно определяет $\langle C_\sigma, \leqslant \rangle$ в $N_2$, $\sigma \in T$, а для $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1} | \sigma_n)$ $\{\{\mathfrak{A}_{\sigma_0}, \mathfrak{B}_{\sigma_0}, \mathfrak{C}_{\sigma_0}\}, \ldots, \{\mathfrak{A}_{\sigma_n}, \mathfrak{B}_{\sigma_n}, \mathfrak{C}_{\sigma_n}\}, \{\mathfrak{A}_\sigma, \mathfrak{B}_\sigma, \mathfrak{C}_\sigma\}, A_\sigma\}$ элементарно определяет $\langle C_{\sigma_0}, \ldots, C_{\sigma_n}, C_\sigma, Ap_\sigma\colon C_\sigma \times C_{\vec{\sigma}} \to C_{\sigma_n} \rangle$ в $N_2$. Так задается элементарное определение $\lambda$-модели функционалов C в $N_2$. Очевидным образом задается теперь и элементарное определение $\lambda$-модели G в $N_2$. Пункты IV и V позволяют доказать, что последнее определение задает интерпретацию $BR$ в $R_2^*$.

З а м е ч а н и е. Использование примитивно-рекурсивных функционалов делает по существу теорию $P_2^*$ (и даже $P_2$) теорией 3-го порядка. Именно это и позволяет не пользоваться аксиомой выбора.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
25 II 1973

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю. Л. Ершов*, Алгебра и логика, т. 11, № 6, 656 (1972). [2] *Ю. Л. Ершов*, Теория нумераций, ч. 2, Новосибирск, 1973. [3] *G. Kreisel*, In: Constructivity in Mathematics, Amsterdam, 1959, p. 101. [4] *G. Kreisel*, J. Symb. Log., v. 27, 380 (1962). [5] *G. Kreisel*, In: Proc. III ICLMPS, Amsterdam, 1968, p. 145. [6] *H. Luckhardt*, Extensional Gödel Functional Interpretation, Lect. Notes in Math., № 306, 1973. [7] *B. Scarpellini*, Zs. Math. Log. Gr. Math., v. 18, № 4, 321 (1972). [8] *S. C. Kleene, R. E. Vesley*, Foundations of Intuitionistic Mathematics, Amsterdam, 1965.