Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 5

УДК 531.51 *МЕХАНИКА*

В. А. ЖЕЛНОРОВИЧ

О ТЕНЗОРЕ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СВЯЗИ С ОДНОЙ МОДЕЛЬЮ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ И ПОЛЯРИЗУЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ВНУТРЕННИМ МОМЕНТОМ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 5 V 1974)

К настоящему времени предложено несколько различных определений для тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде. Наиболее известны и распространены определения Минковского ([1]) и Абрагама ([2]). Детальное рассмотрение следствий, связанных с выбором одного из этих определений, дано в ([3]). Обширная библиография с обсуждением различных точек зрения по этому вопросу содержится в ([4, 5]).

Ниже мы указываем на простой тензор, который можно рассматривать как тензор энергии-импульса электромагнитного поля, отличный от тензоров Минковского и Абрагама и характеризуемый тем, что плотность количества движения поля, определяемая этим тензором, такая же, как по Абрагаму, а плотность трехмерного пондеромоторного момента такая же, как по Минковскому (при добавочном предположении об отсутствии внутреннего момента количества движения у электромагнитного поля).

Пусть x^i, $i=1, 2, 3, 4,$— переменные декартовой системы координат наблюдателя четырехмерного псевдоэвклидова пространства событий индекса три. Рассмотрим в рамках специальной теории относительности сплошную среду с инвариантной плотностью ρ, единичным безразмерным вектором скорости индивидуальных точек среды с компонентами u^i (относительно системы наблюдателя), внутренним электромагнитным моментом, определяемым антисимметрическим тензором объемной плотности с компонентами μ^{ij}. Компоненты μ^{ij} всегда можно представить в виде

$$\mu^{ij}=\rho(u^i\pi^j-u^j\pi^i+\varepsilon^{ijks}u_k m_s),\quad u_i\pi^i=0,\quad u^i m_i=0; \tag{1}$$

здесь ε^{ijks} — компоненты единичного антисимметрического по всем индексам псевдотензора Леви — Чивита $\varepsilon_{1234}=+1$. Компоненты векторов π^i, m_i определяются через компоненты μ^{ij}:

$$\rho\pi^i=-u_j\mu^{ij},\quad \rho m_i={}^1/{}_2\varepsilon_{imsj}u^m\mu^{sj}. \tag{2}$$

Из уравнений (2) видно, что в собственной системе координат выполняются равенства $\pi^4=m_4=0$, а компоненты m_α, π^α, $\alpha=1, 2, 3$, определяют отнесенные к единице массы трехмерный вектор намагниченности и вектор поляризации среды соответственно.

Электромагнитное поле в среде будем описывать антисимметрическим тензором с компонентами $F_{ij}=\partial_iA_j-\partial_jA_i$, где A_i — компоненты векторного потенциала электромагнитного поля, $\partial_i=\partial/\partial x^i$.

Для вывода определения для тензора энергии-импульса для электромагнитного поля и среды — идеальной жидкости воспользуемся вариационным уравнением ([6])

$$\delta\int\limits_{V_4}\Lambda\,d\tau+\delta W=0, \tag{3}$$

в котором лагранжиан Λ определен равенством

$$\Lambda=-\frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij}+{}^1/_2F_{ij}\mu^{ij}+\Lambda_m(\rho, m_i, \pi^i)+\Lambda_{\mathrm{spin}}+\lambda\pi^i u_i+\eta m_i u^i. \qquad (4)$$

Вид уравнения (3) и формулы (4) соответствует (принятым для простоты) допущениям об отсутствии внешних массовых сил и о наличии только обратимых адиабатических процессов. В равенствах (3), (4) V_4 — произвольный четырехмерный объем пространства событий, $d\tau$ — инвариантный элемент объема V_4; δ — символ вариации при постоянных переменных ξ^i системы координат, сопутствующей для среды. Функционал δW в уравнении (3) определяется при вариациях определяющих параметров, отличных от нуля на трехмерной поверхности Σ — границе объема V_4; λ, η — множители Лагранжа; $\Lambda_m(\rho, m_i, \pi^i)$ — задаваемая функция. Величину Λ_{spin} в равенстве (4) определим соотношением

$$\Lambda_{\mathrm{spin}}=\nu u^i\left[\psi^+\gamma_i\frac{d}{d\tau}\psi-\left(\frac{d}{d\tau}\psi^+\right)\gamma_i\psi\right]; \qquad (5)$$

здесь ν — постоянная (гиромагнитное отношение); γ_i — четырехмерные матрицы Дирака; ψ — четырехкомпонентное спинорное поле, заданное в декартовой системе координат x^i, ψ^+ — сопряженное спинорное поле ([7–10]); $d/d\tau=cu^i\partial_i$ — символ производной по собственному времени; c — скорость света в пустоте. По определению в (4) положим $\rho m_i=\psi^+\overset{*}{\gamma}_i\psi$, $\overset{*}{\gamma}_i=-{}^1/_6\varepsilon_{ijks}\gamma^j\gamma^k\gamma^s$. Функция Λ_{spin} согласно первой теореме Нётер, обусловливает наличие в среде внутреннего момента количества движения, определяемого антисимметрическим тензором с компонентами $K^{ij}=\nu\rho\varepsilon^{ijks}u_k m_s$.

Из вариационного уравнения (3) найдем уравнения Эйлера и δW:

$$\partial_j H^{ij}=0, \quad \partial_j P_i{}^j=0, \quad F_{ij}u^j=(\delta_i{}^j-u_i u^j)\frac{\partial\Lambda_m/\rho}{\partial\pi^j}; \qquad (6)$$

$$\begin{cases} \nu u^i\gamma_i\dfrac{d}{d\tau}\psi+c\nu\partial_j(u^iu^j\gamma_i\psi)+\left[\dfrac{1}{2}\varepsilon^{ijks}\overset{*}{F}_{ij}u_k+\left(\dfrac{\eta}{\rho}+u_i\dfrac{\partial\Lambda_m/\rho}{\partial m_i}\right)u^s\right]\overset{*}{\gamma}_s\psi=0, \\ -\nu u^i\dfrac{d}{d\tau}\psi^+\gamma_i-c\nu\partial_j(u^iu^j\psi^+\gamma_i)+ \\ +\left[\dfrac{1}{2}\varepsilon^{ijks}\overset{*}{F}_{ij}u_k+\left(\dfrac{\eta}{\rho}+u_i\dfrac{\partial\Lambda_m/\rho}{\partial m_i}\right)u^s\right]\psi^+\overset{*}{\gamma}_s=0; \end{cases}$$

$$\pi_i u^i=0, \quad m_i u^i=0, \quad \lambda=-u^i\,\partial\Lambda_m/\partial\pi^i;$$

$$\delta W=\int_\Sigma\left\{P_i{}^j\delta x^i+\frac{1}{4\pi}H^{js}\delta_L A_s+c\nu u^iu^j[(\delta\psi^+)\gamma_i\psi-\psi^+\gamma_i\delta\psi]\right\}n_j\,d\sigma;$$

здесь $H^{ij}=F^{ij}-4\pi\mu^{ij}$, $\delta_L A_s=\delta A_s+A_i\partial_s\delta x^i$ — абсолютная вариация векторного потенциала, n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности Σ. Компоненты $P_i{}^j$, $\overset{*}{F}_{ij}$ определяются равенствами

$$\begin{gathered} P_i^j=-\frac{1}{4\pi}\left(F_{im}H^{jm}-\frac{1}{4}F_{sm}H^{sm}\delta_i^j\right)+u^ju_m(\mu_{in}F^{mn}-\mu^{mn}F_{in})+ \\ +(p+\varepsilon)u_iu^j-p\delta_i^j+u^j\left(K_{is}\frac{d}{d\tau}u^s+m_iu_s\frac{\partial\Lambda_m}{\partial m_s}+\pi_iu^s\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\pi^s}\right), \\ p=-\rho^2\frac{\partial\Lambda_m/\rho}{\partial\rho}-{}^1/_4F_{ij}\mu^{ij}, \quad \varepsilon=-\Lambda_m-{}^1/_4F_{ij}\mu^{ij}, \end{gathered} \qquad (7)$$

$$\overset{*}{F}_{ij}=(\delta_i^m-u_iu^m)(\delta_j^n-u_ju^n)\left(F_{mn}-\varepsilon_{mnks}u^k\frac{\partial\Lambda_m/\rho}{\partial m_s}\right)+\nu\left(u_j\frac{d}{\partial\tau}u_i-u_i\frac{d}{\partial\tau}u_j\right)$$

Из уравнений (6) следуют уравнения моментов количества движения

$$\rho \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\rho} K^{ij} - \frac{1}{\nu} K^i{}_n \dot{F}^{nj} + \frac{1}{\nu} K^j{}_n \dot{F}^{ni} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) можно записать также в виде

$$\nu \frac{d}{d\tau} m_i = \dot{F}_{ij} m^j. \quad (9)$$

Уравнения (6)—(9) определяют модели жидкостей с внутренним электромагнитным и механическим моментами в электромагнитном поле. В качестве замкнутой системы дифференциальных уравнений, определяющих модель среды, можно рассматривать тензорные уравнения в (6) (без уравнений для спинора ψ) и уравнения (9). Тогда соотношения (5) и уравнение $\rho m_i = \psi^+ \dot{\gamma}_i \psi$ можно рассматривать как вспомогательную удобную параметризацию, используемую для решения вариационной задачи *. Вместе с тем, добавочные параметры в ψ можно использовать, в частности, для описания различных добавочных свойств среды.

Компоненты тензора $P_i{}^j$, определенные равенствами (7), можно рассматривать как компоненты тензора энергии-импульса системы электромагнитное поле и материя. Из определения $P_i{}^j$ видно, что в качестве тензора энергии-импульса электромагнитного поля можно принять тензор, определяемый в системе координат наблюдателя компонентами

$$P_{i(f)}^{\ j} = -\frac{1}{4\pi}\left(F_{im}H^{jm} - \frac{1}{4} F_{sm}H^{sm}\delta_i{}^j\right) + u^j u_m (\mu_{in}F^{mn} - \mu^{mn}F_{in}) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[F_{im}H^{jm} - \frac{1}{4} F_{sm}H^{sm}\delta_i{}^j + u^j u_m (H_{in}F^{mn} - H^{mn}F_{in})\right]. \quad (10)$$

В силу определения (10) тождественно имеем

$$P_{i(f)}^{\ i} = 0, \quad u_j (P_{(f)}^{ij} - P_{(f)}^{ji}) = 0. \quad (11)$$

Второе соотношение в (11) носит общий характер и связано с условием $u_j K^{ij} = 0$. Вычислим компоненты тензора (10) в собственной системе координат. Матрицы F_{ij}, H^{ij} в собственной системе координат задаются следующим образом ([3]):

$$F_{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & E_1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & E_2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{Vmatrix}, \quad H^{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -D^1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -D^2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -D^3 \\ D^1 & D^2 & D^3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Компоненты D^α, B^α определяют векторы электрической и магнитной индукции соответственно. Компоненты E_α, H_α являются соответственно компонентами векторов электрической и магнитной напряженности. Учитывая, что $u^\alpha = 0$, $u^4 = 1$, для компонент $P_{i(f)}^{\ j}$ в собственной системе координат найдем

$$P_{(f)}^{4\alpha} = P_{(f)}^{\alpha 4} = \frac{1}{4\pi}(E \times H)^\alpha, \quad P_{4(f)}^{\ 4} = \frac{1}{8\pi}(B^\alpha H_\alpha + E_\alpha D^\alpha),$$

$$P_{\alpha(f)}^{\ \beta} = \frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha D^\beta + H_\alpha B^\beta - \frac{1}{2}(D^\lambda E_\lambda + H_\lambda B^\lambda)\delta_\alpha{}^\beta\right]. \quad (12)$$

---

* Отметим, что систему тензорных уравнений в (6) и уравнения (9) можно получить, используя параметризацию ([10])

$$\Lambda_{\text{spin}} = i\nu\left[\psi^+ \frac{d}{d\tau}\psi - \left(\frac{d}{d\tau}\psi^+\right)\psi\right], \quad \mu^{ij} = \rho u^i \pi^j - \rho u^j \pi^i + \frac{i}{2}\psi^+(\gamma^i\gamma^j - \gamma^j\gamma^i)\psi$$

и решая условную вариационную задачу со связью $u_j \psi^+ (\gamma^i\gamma^j - \gamma^j\gamma^i)\psi = 0$.

Из (12) следует, что плотность количества движения в собственной системе координат, определяемая тензором (10), такая же, как и определяемая тензором Абрагама, а пространственные компоненты совпадают с соответствующими компонентами тензора Минковского. Из (12) следует также, что тензор Абрагама является симметрической частью тензора (10). Таким образом, на основании (12), для компонент T^{ij} тензора Абрагама в системе координат наблюдателя можно написать

$$T^{ij}={}^1/_2(P^{ij}_{(f)}+P^{ji}_{(f)}).$$

Отметим теперь следующий момент. Если P^{ij} — контрвариантные компоненты тензора энергии-импульса рассматриваемой замкнутой физической системы, обладающей внутренним моментом количества движения, то уравнение моментов количества движения для такой системы можно записать в виде

$$\partial_k(P^{ik}x^j-P^{jk}x^i+cu^kK^{ij})=0. \qquad (13)$$

Из уравнений (13) с учетом уравнений импульсов $\partial_k P_i^{\ k}=0$ найдем

$$P^{ji}-P^{ij}=\rho\frac{d}{d\tau}\frac{1}{\rho}K^{ij}. \qquad (14)$$

Из (14) видно, что антисимметрическая часть тензора энергии-импульса вообще не равна нулю и определяет плотность внутренного момента сил. Если рассматриваемая физическая система состоит из сплошной среды с внутренним моментом количества движения и электромагнитного поля, то при наличии равенства $P^{ij}=P^{ij}_{(m)}+P^{ij}_{(f)}$, где $P^{ij}_{(m)}$ — компоненты тензора энергии-импульса материи, тензор энергии-импульса поля удовлетворяет соотношениям

$$P^{ji}_{(f)}-P^{ij}_{(f)}=\rho\frac{d}{d\tau}\frac{1}{\rho}K^{ij}+P^{ij}_{(m)}-P^{ji}_{(m)}. \qquad (15)$$

Из (15) следует, что если намагничивающаяся среда описывается моделью, не учитывающей внутреннего момента количества движения, и если тензор энергии-импульса среды симметричен, то тензор энергии-импульса поля P^{ij} также симметричен (см. также ([3])).

В применении к рассмотренной выше модели для $\nu=0$ в силу уравнений (6) компоненты $P^{ij}_{(f)}$, определенные равенством (10), становятся симметрическими и совпадают в этом случае с компонентами тензора Абрагама, если функция Λ_m инвариантна относительно группе Лоренца. Таким образом, в рассматриваемом классе моделей и определений использование тензора Абрагама соответствует пренебрежению внутренним моментом количества движения среды.

Автор выражает признательность акад. Л. И. Седову за обсуждение работы и полезные замечания.

Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *H. Minkowski*, Gött. Nachr., B. 45 (1908). [2] *M. Abraham*, Theorie der Elutrizität, B. 2, 1914. [3] *Л. И. Седов*, Механика сплошной среды, т. 1, «Наука», 1973. [4] *Д. В. Скобельцын*, УФН, т. 110, в. 2 (1973). [5] *В. Л. Гинзбург*, УФН, т. 110, в. 2 (1973). [6] *Л. И. Седов*, УМН, т. 20, в. 5 (1965). [7] *Э. Картан*, Теория спиноров, 1947. [8] *В. А. Желнорович*, Теоретич. и матем. физ., т. 2, № 1 (1970). [9] *В. А. Желнорович*, Вестн. Московск. унив., сер. физ.-астр., № 1 (1972) [10] *В. А. Желнорович*, В сборн. Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (к 60-летию акад. Л. И. Седова), «Наука», 1969.