Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 5

УДК 517.946

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. М. ИЛЬИН, Ю. П. ГОРЬКОВ, Е. Ф. ЛЕЛИКОВА

О МЕТОДЕ СРАЩИВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 VIII 1973)

Среди задач математической физики, к которым применяются методы теории возмущений, значительное место занимают краевые задачи для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Удобным методом исследования таких задач является выделение пограничного слоя. Всюду вне этого слоя решение представляется довольно простым асимптотическим рядом, который называется внешним разложением. В пределах пограничного слоя к этому ряду добавляется другой специальный асимптотический ряд, образующий так называемое внутреннее разложение (обзор работ см. в ([1])). Однако, если члены внешнего разложения имеют особенность на границе (порядок которой, как правило, увеличивается с увеличением точности аппроксимации вне пограничного слоя), то процедура построения несколько меняется, разработаны другие асимптотические методы.

Один из этих методов, который носит название метода сращивания асимптотических разложений, основан на том, что в некоторой промежуточной области, где внешние переменные малы, а внутренние переменные, наоборот, велики, внешнее и внутреннее асимптотические разложения, по существу, совпадают. Это дает возможность найти некоторые постоянные в асимптотических рядах, которые иначе оставались бы неопределенными. Изложению и применениям этого метода посвящены в значительной степени монографии ([2, 3]) и статья ([4]).

Тем не менее сколько-нибудь полной математической теории этого метода не существует. Более того, нам неизвестны работы, где бы было строго обосновано построенное методом сращивания полное асимптотическое разложение решения краевой задачи в частных производных. В некоторых работах (например, ([5])) лишь исследуются те случаи, когда решение имеет явное интегральное представление.

В настоящей работе рассматриваются две конкретные задачи, для которых строится методом сращивания полное асимптотическое разложение и указывается способ исчерпывающего его обоснования.

I. Задача Дирихле для уравнения

$$\varepsilon Lu+a_1(x, y)\partial u/\partial x+a_2(x, y)\partial u/\partial y+a(x, y)u=f(x, y) \tag{1}$$

в ограниченной области D с гладкой границей Γ, где L — равномерно эллиптический оператор второго порядка. Пусть AOC — характеристика предельного уравнения первого порядка, которая касается границы Γ изнутри в точке O. Будем считать, что касание имеет первый порядок, вектор (a_1, a_2) направлен вдоль кривой от A к C, нигде не обращается в нуль на этой кривой и кривая AOC пересекает Γ в точках A и C под ненулевыми углами.

Легко показать, что $u_\varepsilon(x, y)$ — решение уравнения (1), равное нулю на Γ, при $\varepsilon\to 0$ стремится к функции, вообще говоря, разрывной вдоль кривой AO. Предельная функция является решением уравнения $a_1\partial u/\partial x+a_2\partial u/\partial y+au=f$, но с одной стороны от кривой AO — это решение, принимающее нулевые значения на Γ вблизи точки C, а с другой — решение, принимающее нулевые значения на Γ вблизи точки O, так что нулевое приближение функции $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon\to 0$ легко выписывается явно. Задача состоит в том, чтобы получить равномерную аппроксимацию функции $u_\varepsilon(x, y)$ в окрестности AO с точностью $O(\varepsilon^N)$, где N произвольно. Неясно, существует ли простой способ даже формального выписывания этого асимптотического разложения, тем более, что оно имеет не вполне тривиальный вид. В настоящей работе этот вид получен путем детального изучения поведения решения $u_\varepsilon(x, y)$ в окрестности точки O и согласования асимптотических разложений в разных частях области D.

Ограничимся изложением частного случая, когда область D в окрестности точки O — начала координат — совпадает с полуплоскостью $x>0$, а уравнение (1) имеет вид *

$$\varepsilon\Delta u-yu_x-u_y=f(x, y), \quad u|_\Gamma=0. \tag{2}$$

Характеристика AOC — это парабола $x=y^2/2$. Пусть Γ_0 — это часть границы вблизи точки C, Γ_1 — вблизи точки O и Γ_2 — вблизи точки A. Решение $u_\varepsilon(x, y)$ изучается в области D^*, состоящей из тех точек области D, для которых $|x-y^2/2|<\delta$ и расстояние точек до Γ_2 меньше δ. Фиксируем также ν такое, что $0<\nu<{}^1/_4$ и введем следующие обозначения для областей:

$$D_{1,\varepsilon}=D^*\cap\{0<x<\varepsilon^{2\nu}, -\infty<y<\infty\}, \quad D_{2,\varepsilon}=\{0<x<\varepsilon^{2\nu}, |y|<\varepsilon^\nu\},$$
$$D_{3,\varepsilon}=D^*\cap\{|x-y^2/2|<\varepsilon^{2\nu}/2, y<\varepsilon^\nu\},$$

$$D_{0,\varepsilon}=[D^*\cap\{x>y^2/2\}]\setminus\bigcup^{3} D_{i,\varepsilon}, \quad D_{4,\varepsilon}=[D^*\cap\{x<y^2/2\}]\setminus\bigcup_{i=1}^{3} D_{i,\varepsilon}.$$

В каждой из этих областей построим асимптотические разложения $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_{j,k}\varphi_k(\varepsilon)$, где j будет обозначать номер области, k — номер приближения, а $\varphi_k(\varepsilon)$ — либо степени ε, либо произведения степеней ε на степени $\ln\varepsilon$. Частичные суммы этих порядков будем обозначать $\hat u_{j,n}$. Функции $u_{j,k}$ — функции переменных, зависящих при $1\leqslant j\leqslant 3$ от ε: $u_{0,k}(x, y)$, $u_{4,k}(x, y)$, $u_{1,k}(x\varepsilon^{-1}, y)$, $u_{2,k}(x\varepsilon^{-2/3}, y\varepsilon^{-1/3})$, $u_{3,k}((x-y^2/2)\varepsilon^{-1/2}, y)$. Они являются решениями уравнений, которые очень просто получаются и не будут здесь выписаны: $\hat u_{j,n}$ подставляются в исходное уравнение (записанное в соответствующих независимых переменных) и затем приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях ε и $\ln\varepsilon$. При этом функция $\hat u_{1,n}(x\varepsilon^{-1}, y)$ подставляется в однородное уравнение, а все остальные — в неоднородные. Трудность обычно состоит в выявлении дополнительных условий, определяющих решения этих уравнений.

В областях $D_{0,\varepsilon}$, $D_{1,\varepsilon}$ и $D_{4,\varepsilon}$ коэффициенты $\varphi_k(\varepsilon)=\varepsilon^k$. Функции $u_{0,k}(x, y)$ и $u_{4,k}(x, y)$ однозначно определяются тем, что они равны нулю на Γ_0 и на Γ_2 соответственно. Функции $u_{1,k}(\zeta, y)$ при $0<\zeta<\infty$ однозначно определяются условием $u_{1,k}(0, y)=-u_{0,k}(0, y)$.

В области $D_{2,\varepsilon}$ коэффициенты $\varphi_k(\varepsilon)=\varepsilon^{k/3}$. Функции $u_{2,k}(\xi, \eta)$ при $0\leqslant\xi<\infty$, $-\infty<\eta<\infty$ однозначно определяются условиями: $u_{2,k}(0, \eta)=0$ и $u_{2,k}(\xi,\eta)-P_k(\xi, \eta) \underset{\eta\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, где полиномы $P_k(\xi, \eta)$ — коэффициенты при $\varepsilon^{k/3}$ в разложении функции $u_{0,n}(\varepsilon^{2/3}\xi, \varepsilon^{1/3}\eta)$ в ряд по степеням ε.

Для каждой из построенных таким образом функций $u_{2,k}(\xi, \eta)$ можно определить ее асимптотическое поведение при $\eta\to\infty$. Это позволяет правильно описать разложение в самой интересной области — области $D_{3,\varepsilon}$.

* В общем случае получаются совершенно аналогичные, но более громоздкие формулы. Асимптотика решения уравнения (2) рассматривалась в [6] в связи с одной гидромеханической задачей. В этой статье выписаны первые члены асимптотического разложения.

В области $D_{3,\varepsilon}$ асимптотическое разложение имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/12} \sum_{p=0}^{l_k} (\ln \varepsilon)^p u_{3,k,p}(\sigma, y), \quad \sigma=(x-y^2/2)\varepsilon^{-1/2}, \tag{3}$$

где $l_k=[(k+2)/8]$. Функции $u_{3,k,p}(\sigma, y)$ определяются при $0<y<y_0$, $-\infty<\sigma<\infty$ как решения параболических уравнений, которые получаются после подстановки выражения (3) в уравнение (1). Кроме того, для функций $u_{3,k,p}(\sigma, y)$ задаются главные члены асимптотического разложения при $y\to 0$ (эти функции имеют особенности при $y\to 0$, причем порядки особенностей растут вместе с номером k). Главные члены асимптотики получаются из асимптотических разложений построенных функций $u_{2,k}(\xi, \eta)$ и однозначно определяют решения $u_{3,k,p}(\sigma, y)$.

Обозначим

$$U_n(x, y, \varepsilon)= \begin{cases} \hat{u}_{j,n} & \text{в} \quad D_{j,\varepsilon}, \quad j\neq 1, \\ \hat{u}_{0,n}+\hat{u}_{1,n} & \text{в} \quad D_{1,\varepsilon}. \end{cases}$$

Теорема 1. *В замкнутой области* $\overline{D}^*$ $|u_\varepsilon(x, y)-U_n(x, y, \varepsilon)|<M\varepsilon^{n\lambda}$, *где* λ *зависит лишь от выбранного выше показателя* ν, *а* M *не зависит от* ε.

Тем самым построенные функции $u_{j,k}$ дают асимптотическое разложение с точностью до любой степени ε в замкнутой области, включающей линию разрыва предельного решения.

II. Задача Дирихле для уравнения

$$\varepsilon\Delta u-u_y=f(x, y) \tag{4}$$

в квадрате $D\{0<x<1,\ 0<y<1\}$ с гладкими (однако не согласованными) граничными данными. Граничные значения на стороне $y=0$ и стороне $x=0$ будем обозначать соответственно $\varphi(x)$ и $\psi(y)$.

Всюду, исключая окрестности границ $x=0$, $x=1$, $y=1$, решение $u_\varepsilon(x, y)$ легко исследуется. Оно разлагается в асимптотический ряд по степеням ε с коэффициентами $u_{0,k}(x, y)$. Функции $u_{0,k}(x, y)$ удовлетворяют уравнениям и начальным условиям, которые получаются описанным выше способом. Чтобы получить асимптотическое разложение в замкнутой области, надо прибавить к полученному ряду функции пограничного слоя вблизи остальной части границы. Около отрезка $x=0$ это будет так называемый параболический пограничный слой: $u_\varepsilon\sim\sum \varepsilon^k u_{1,k}(x\varepsilon^{-1/2}, y)$, где функции $u_{1,k}(\zeta, y)$ равны нулю при $y=0$ и равны соответствующим граничным значениям при $x=0$. Описанная конструкция давно известна ([7]), но функции $u_{1,k}$ не могут аппроксимировать решение в замкнутой области, так как они имеют особенности в точке (0, 0). И дело даже не в том, что аппроксимация плоха вблизи точки (0, 0), а в том, что в классе функций, имеющих особенность в точке (0, 0), не определяются однозначно функции $u_{1,k}$. Поэтому, чтобы получить равномерную аппроксимацию вблизи всей границы $x=0$ (даже не обращая внимания на окрестность начала координат), надо исследовать поведение решения $u_\varepsilon(x, y)$ в окрестности начала координат.

Введем переменные $\xi=x\varepsilon^{-1}$, $\eta=y\varepsilon^{-1}$. В этих переменных уравнение (4) приобретает вид

$$\Delta u-u_\eta=0. \tag{5}$$

Решение в области $0<x<\varepsilon^{2\nu}$, $0<y<\varepsilon^{2\nu}$ представляется в виде ряда по степеням ε с коэффициентами $u_{2,k}(\xi, \eta)$. Эти функции равны нулю при $\eta=0$, удовлетворяют уравнению (5) и соответствующим граничным условиям при $\xi=0$. Нетрудно выписать интегральные формулы для функций $u_{2,k}$ и исследовать их асимптотику. Условие согласования с функциями $u_{1,k}(\zeta, y)$ позволяют определить последние.

Обозначим

$$U_n(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} \hat{u}_{0,n} \text{ при } \varepsilon^\nu < x \leqslant 1, \\ \hat{u}_{0,n} + u_{2,n} \text{ при } 0 < x < \varepsilon^{2\nu}, \quad 0 < y < \varepsilon^{2\nu}, \\ \hat{u}_{0,n} + \hat{u}_{1,n} \text{ в остальной части } D; \end{cases}$$

$\nu < 1$, $u_{j,k}$ — функции, способ построения которых указан выше.

Теорема 2. *В замкнутой области D_δ, где D_δ — совокупность тех точек области D, для которых $y < 1 - \delta$, $x < 1 - \delta$, $|u_\varepsilon(x, y) - U_n(x, y, \varepsilon)| < M\varepsilon^{n\lambda}$, где λ зависит лишь от ν, а M не зависит от ε.*

Построение асимптотики вблизи другой границы $x=1$ проводится аналогично. Теоремы 1 и 2 доказываются единым методом, который, по нашему мнению, может быть применен во многих задачах, связанных с согласованием асимптотических разложений. В разных частях рассматриваемой области строятся различные асимптотические представления. Границы этих областей зависят от параметра ε. Доказывается, что на этих границах частичные суммы построенных асимптотических рядов, вместе со своими производными, мало отличаются. Отсюда, из малости оператора вне границ раздела и из малости разности на границе области вытекает равномерная близость частичной суммы асимптотического ряда к истинному решению.

При этом нет надобности вводить промежуточные пределы ([3, 4]), которые, на наш взгляд, лишь затрудняют исследование. Границы раздела могут варьироваться в широких пределах. Это показывает, что в промежуточной области действительно различные асимптотические разложения по существу совпадают.

Конечно, высказанные выше рекомендации носят слишком общий характер и основную трудность исследования составляет детальный анализ асимптотического поведения вспомогательных функций, построенных в разных частях области. В описанных здесь задачах I и II такой анализ позволил построить и обосновать полное асимптотическое разложение решений.

Примечание при корректуре. После того, как статья была сдана в печать, авторы смогли познакомиться с работой ([8]), где асимптотика решения уравнения (4) была получена из явного представления. Метод, рассматриваемый в нашей работе, позволяет получить асимптотику и для уравнения с переменными коэффициентами.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
3 VIII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. А. Треногин*, УМН, т. 25, 4 (154), 123 (1970). [2] *М. Ван-Дайк*, Методы возмущений в механике жидкости, М., 1967. [3] *Дж. Коул*, Методы возмущений в прикладной математике, М., 1972. [4] *П. А. Лагерстром, Р. Г. Кастен*, Сборн. пер. Механика, т. 2, 138, 50 (1973). [5] *L. R. Cook, G. S. S. Ludford*, Siam J. Math. Anal., v. 2, № 4, 567 (1971). [6] *В. М. Каменкович, Г. М. Резник*, ДАН, т. 202, № 5, 1061 (1972). [7] *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник*, УМН, т. 12, 5 (77), 3 (1957). [8] *L. P. Cook, G. S. S. Ludford*, Siam. J. Math. Anal., v. 4, № 1 (1973).