

Е. В. ЩЕПИН

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ Л. А. ТУМАРКИНА

(Представлено академиком П. С. Александровым 3 I 1974)

В 1939 г. Л. А. Тумаркин (см. (1)) поставил следующую проблему: будут ли все ненулевые поперечники Урысона стандартной n -мерной сферы равны ее диаметру?

Эквивалентным образом эту проблему можно сформулировать так: будет ли всякое непрерывное отображение n -мерной сферы, понижающее размерность, склеивать пару антиподов? В настоящей заметке дается отрицательное решение этой проблемы. А именно, для любого натурально-го n строится отображение сферы S^{2n+1} в $(n+1)$ -мерный полнэдр, не склеивающее никакой пары антиподов.

Через T обозначим подпространство плоскости R^2 , состоящее из трех лучей, выходящих из нуля. В полярных координатах оно записывается так: $T = \{(\rho, \varphi) : \varphi = 0, 2/3\pi, 4/3\pi\}$.

Определим ретракцию $r: R^2 \rightarrow T$ следующим образом: на первой трети плоскости $\{(\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2/3\pi\}$ r совпадает с проектированием параллельно лучу $\{(\rho, \varphi) : \varphi = 4/3\pi\}$ на объединение двух других лучей, на остальной части плоскости r определяется симметрично, так что выполнено равенство $r \circ R^{2\pi/3} = R^{2\pi/3} \circ r$, где $R^{2\pi/3}: R^2 \rightarrow R^2$ — поворот относительно начала координат на угол $2/3\pi$. Как нетрудно видеть, это отображение непрерывно и обладает следующим свойством: если $r(x, y) = r(-x, -y)$, то $x = y = 0$. Искомое непрерывное отображение $f: S^{2n+1} \rightarrow T^{n+1}$ сферы

$$S^{2n+1} = \left\{ x_1 \dots x_{2n+2} : \sum_{i=1}^{2n+2} x_i^2 = 1 \right\}$$

в $T^{n+1} = \underbrace{T \times T \times \dots \times T}_{n+1 \text{ раз}}$, которое не склеивает антиподов, определяется так:

$$f(x_1 \dots x_{2n+2}) = (r(x_1, x_2), r(x_3, x_4), \dots, r(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \in T^{n+1}.$$

Действительно, возьмем любые две диаметрально противоположные точки $x = (x_1 \dots x_{2n+2})$ и $-x = (-x_1 \dots -x_{2n+2})$. Если мы предположим, что $f(x) = f(-x)$, то получим: в силу свойства отображения r , что $x_1 = x_2 = \dots = x_{2n+2} = 0$. А точка со всеми нулевыми координатами нашей сфере не принадлежит.

В. М. Тихомиров и Л. А. Тумаркин доказали (см. (2)), что k -мерный поперечник Урысона единичной сферы $u_k S^n = 2$ при $0 \leq k \leq (n-1)/2$.

Из изложенного выше вытекает, что $u_k S^n < 2$ при $(n+1)/2 \leq k$. Остается выяснить, верно ли равенство $u_k S^{2k} = 2$ при $k \geq 2$ (равенство $u_1 S^2 = 2$ доказал Д. О. Шклярский, см. (3)). Оказывается, что это равенство справедливо. Таким образом получаем окончательный результат:

Теорема. $u_k S^n = 2$ при $k \leq n/2$ и $u_k S^n < 2$ при $k > n/2$.

Приступим теперь к доказательству равенства $u_k S^{2k} = 2$. Оно опирается на следующий результат о гомотопических группах букетов сфер: $2k$ -мерная гомотопическая группа букета конечного числа k -мерных сфер — $\pi_{2k}(\bigvee_{i=1}^n S_i^k)$ — конечна (см. (4)).

Лемма. *Всякий конечный n -мерный симплициальный комплекс K является подкомплексом некоторого n -мерного конечного симплициального*

комплекса $\bar{K}$, который имеет гомотопический тип букета конечного числа n -мерных сфер.

Доказательство леммы. Искомый комплекс $\bar{K}$ является под-комплексом конуса $C(K)$, состоящим из объединения основания, которое мы отождествляем с K , и конуса $C(K^{n-1})$ над $(n-1)$ -мерным остовом комплекса K , $\bar{K} = UC(K^{n-1}) \subset C(K)$.

Любое отображение $f: S^i \rightarrow \bar{K}$, где $i < n$, по теореме о клеточной аппроксимации гомотопно отображению в $(n-1)$ -мерный остов $\bar{K}$, содержащийся в $C(K^{n-1})$. Но $C(K^{n-1})$ стягиваем, следовательно, f гомотопно нулю.

А всякий конечный n -мерный клеточный комплекс, связный в размерностях $\leq n-1$, имеет гомотопический тип букета конечного числа сфер (см. (5), стр. 45). Лемма доказана.

Для доказательства равенства $u_k S^{2k} = 2$ достаточно доказать, что любое непрерывное отображение $f: S^{2k} \rightarrow P^k$ сферы S^{2k} в k -мерный симплицальный комплекс склеивает пару антиподов. В силу леммы можно считать, что P^k имеет гомотопический тип букета конечного числа k -мерных сфер.

Доказательство будем вести от противного. Предположим, что $f: S^{2k} \rightarrow P^k$ не склеивает никакой пары антиподов. Тогда отображение $\bar{f}: S^{2k} \rightarrow P^k \times P^k$, определяемое равенством $\bar{f}(x) = (f(x), f(-x)) \in P^k \times P^k$, такое обладает этим свойством.

Для любого непрерывного отображения $g: P^k \times P^k \rightarrow S^{2k}$ сквозное отображение $g\bar{f}: S^{2k} \rightarrow S^{2k}$ гомотопно нулю. Действительно, класс отображений, гомотопных $g\bar{f}$, $[g\bar{f}] \in \pi_{2k} S^{2k}$, принадлежит образу гомоморфизма $g^*: \pi_{2k}(P^k \times P^k) \rightarrow \pi_{2k}(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}$,

$$\pi_{2k}(P^k \times P^k) \rightarrow \pi_{2k}(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}, \quad \text{а} \quad \pi_{2k}(P^k \times P^k) = \pi_{2k} P^k \oplus \pi_{2k} P^k = \pi_{2k} \left(\bigvee_{i=1}^m S_i^k \right) \oplus \pi_{2k} \left(\bigvee_{i=1}^m S_i^k \right),$$

как было сказано выше, — конечная группа и, следовательно,

g^* — нулевой гомоморфизм.

Теперь мы, используя предположение, что f не склеивает никакой пары антиподов, построим некоторое непрерывное отображение $h: P^k \times P^k \rightarrow S^{2k}$, для которого $h\bar{f}$ не будет гомотопно нулю и, таким образом, получим нужное противоречие.

Зафиксируем некоторое симплицальное вложение $i: P^k \rightarrow R^{2k+1}$ нашего полиэдра в $(2k+1)$ -мерное евклидово пространство. Определим отображение $s: P^k \times P^k \rightarrow R^{2k+1}$ формулой $s(x, y) = i(x) - i(y)$. Пусть $d = \min_{x \in S^{2k}} |s\bar{f}(x)|$,

где $|x|$ — это обычная евклидова норма; $d \neq 0$, так как по предположению $f(x) \neq f(-x)$ для любого $x \in S^{2k}$. Далее, $\dim s(P^k \times P^k) \leq 2k$, ибо отображение s симплицально и, следовательно, не повышает размерность. Поэтому существует точка $a \in R^{2k+1} \setminus s(P^k \times P^k)$ с нормой $|a| < d$. Через S_d^{2k} обозначим сферу радиуса d с центром в начале координат $S_d^{2k} = \{x: |x| = d\}$. Из точки a как из центра можно спроектировать $s(P^k \times P^k)$ на S_d^{2k} ; пусть π_a — это центральная проекция $\pi_a: s(P^k \times P^k) \rightarrow S_d^{2k}$. Искомое $h = \pi_a \circ s: P^k \times P^k \rightarrow S_d^{2k}$. Действительно, для доказательства того, что $h\bar{f}$ не гомотопно нулю, в силу теоремы Борсука — Улама (см. (6)) достаточно установить, что никакие две диаметрально противоположные точки не переходят в одну при этом отображении. А это вытекает из следующего геометрически очевидного утверждения: две центрально симметричные точки, находящиеся на расстоянии $\geq d$ от начала координат, не могут проектироваться из точки a , лежащей на расстоянии $< d$ от начала координат, в одну точку сферы S_d^{2k} .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. М. Тихомиров, Л. А. Тумаркин, Тр. Международн. симпозиума по топологии и ее применениях, Херцег-Нови, 25—31 VIII 1968. Югославия, Београд, 1969, стр. 310.
- ² В. М. Тихомиров, Л. А. Тумаркин, Proc. of the Third Prague Topological Symposium, 1971, p. 441.
- ³ Д. О. Шклярский, Матем. сборн., нов. сер., т. 16, 125 (1945).
- ⁴ P. I. Hilton, J. London Math. Soc., v. 30, 154 (1955).
- ⁵ Д. Б. Фукс, А. Т. Фоменко, Гомотопическая топология, М., 1970.
- ⁶ Э. Спеньер, Алгебраическая топология, М., 1971.