Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 5

УДК 518.5 *МАТЕМАТИКА*

Б. И. КВАСОВ, В. В. КОБКОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КУБИЧЕСКИХ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙНОВ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УЗЛАМИ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 25 II 1974)

В работе [2] рассмотрено однопараметрическое семейство кубических эрмитовых сплайнов с дополнительными узлами дефекта 1. Там же для этого вида сплайнов доказана теорема существования и единственности. В настоящей заметке для кубических эрмитовых сплайнов с дополнительными узлами указаны пределы и приведены базисы из функций типа B-сплайнов [4], сформулированы теоремы сходимости.

1. Пусть на отрезке $[a, b]$ имеется сетка Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_{N+1}=b$, i-му узлу которой отвечают вещественные числа $\{y_i, y_i'\}$, $i=0,\ldots,N+1$. Введем на $[a, b]$ дополнительную сетку δ с узлами в точках

$$x_i+\alpha_1 h_i,\ x_i+\alpha_2 h_i,\ \alpha_1+\alpha_2=1,\ 0<\alpha_1<0{,}5;\ h_i=x_{i+1}-x_i,\ i=0,\ldots,N,$$

и обозначим через Φ множество кубических сплайнов $s(x)$ дефекта 1 на сетке δ, удовлетворяющих условиям интерполяции

$$s(x_i)=y_i,\ s'(x_i)=y_i',\ i=0,\ldots,N+1. \tag{1}$$

Для $x\in[x_i, x_{i+1}]$ в терминах величин $M_i=s''(x_i)$ имеем

$$s(x)=\left[\frac{M_{i+1}-M_i}{h_i}-\alpha_2C_{1i}-\alpha_1C_{2i}\right]\frac{(x-x_i)^3}{6}+M_i\frac{(x-x_i)^2}{2}+y_i'(x-x_i)+$$
$$+y_i+C_{1i}\frac{(x-x_i-\alpha_1h_i)_+^3}{6}+C_{2i}\frac{(x-x_i-\alpha_2h_i)_+^3}{6}, \tag{2}$$

где

$$C_{1i}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)h_i^2}\left[\frac{y_i-y_{i+1}}{h_i}+\frac{(1+\alpha_2)y_i'+(1+\alpha_1)y'_{i+1}}{3}+\right.$$
$$\left.+\alpha_2\frac{M_ih_i}{6}-\alpha_1\frac{M_{i+1}h_i}{6}\right],$$

$$C_{2i}(\alpha_1,\alpha_2)=C_{1i}(\alpha_2,\alpha_1),\qquad (E)_+=\max(E,0).$$

Условие непрерывности $S'''(x)$ в узлах сетки Δ дает систему линейных алгебраических уравнений для определения величин M_i (например, с помощью трехточечной прогонки [3])

$$\lambda_iM_{i-1}-\left(1+\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\right)M_i+\mu_iM_{i+1}=\frac{6}{\alpha_1\alpha_2}\left[\frac{\mu_i}{h_i}\left(\frac{y_i-y_{i+1}}{h_i}+\frac{y'_{i+1}+2y_i'}{3}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda_i}{h_{i-1}}\left(\frac{y_{i-1}-y_i}{h_{i-1}}+\frac{2y_i'+y'_{i-1}}{3}\right)\right], \tag{3}$$

где $\lambda_i=1-\mu_i=h_i/(h_{i-1}+h_i)$, $i=1,\ldots,N$.

Для замыкания системы (3) необходимо задать два дополнительных краевых условия. Мы будем рассматривать условия

$$s''(x_0)=y_0'', \qquad s''(x_{N+1})=y''_{N+1}, \tag{4}$$

$$s'''(x_0)=y_0''', \qquad s'''(x_{N+1})=y'''_{N+1}, \tag{5}$$

или более общего вида

$$-\left(1+\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\right)M_0+\mu_0 M_1=d_0, \qquad \lambda_{N+1}M_N-\left(1+\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\right)M_{N+1}\pm d_{N+1}, \tag{6}$$

а также периодическую задачу

$$s^{(\alpha)}(a)=s^{(\alpha)}(b), \quad \alpha=0,\ 1,\ 2. \tag{7}$$

2. Введем в рассмотрение два специальных случая кубических эрмитовых сплайнов дефекта 2.

Пусть $H(x)$ – сплайн на сетке Δ, удовлетворяющий условию (1). Тогда для $x\in[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$H(x)=\frac{12}{h_i^2}\left[\frac{y_i'+y_{i+1}'}{2}-\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right]\frac{(x-x_i)^3}{6}+\frac{6}{h_i}\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\right.$$

$$\left.-\frac{2y_i'+y_{i+1}'}{3}\right]\frac{(x-x_i)^2}{2}+y_i'(x-x_i)+y_i. \tag{8}$$

Пусть $K(x)$ — сплайн на сетке $\delta=\{x_i+h_i/2,\ i=0,\dots,N\}$, удовлетворяющий условию (1). Для $x\in[x_i, x_{i+1}]$ в терминах величин $M_i=K''(x_i)$ имеем

$$K(x)=A_i\frac{(x-x_i)^3}{6}+M_i\frac{(x-x_i)^2}{2}+y_i'(x-x_i)+y_i+C_i\frac{(x-x_i-h_i/2)^3}{6}+$$

$$+D_i\frac{(x-x_i-h_i/2)_+^2}{2}, \tag{9}$$

где

$$A_i=\frac{M_{i+1}-M_i}{h_i}-\frac{C_i}{2}-\frac{D_i}{h_i}, \qquad C_i=\frac{8}{h_i}\left[\frac{y_i'-y_{i+1}'}{h_i}+\frac{M_i+M_{i+1}}{2}\right],$$

$$D_i=\frac{24}{h_i}\left[\frac{y_i-y_{i+1}}{h_i}+\frac{y_i'+y_{i+1}'}{2}+\frac{(M_i-M_{i+1})h_i}{12}\right].$$

Величины M_i находятся из системы (3) с $\alpha_1={}^1/_2$, замыкаемой с помощью одного из краевых условий (4)–(7).

Теорема 1. *Пусть $s(x)\in\Phi$ и удовлетворяет одному из краевых условий* (4) – (7), *а* $H(x)$, $K(x)$ – *кубические эрмитовы сплайны соответственно из* (8), (9). *Тогда*

$$\lim_{\alpha_1\to 0}s(x)=H(x), \quad \lim_{\alpha_1\to {}^1/_2}s(x)=K(x).$$

3. Обозначим $\bar h=\max_i h_i$, $\underline{h}=\min_i h_i$. Рассмотрим последовательность сеток Δ_k (и δ_k) такую, что

$$\bar h_k\to 0, \quad k\to\infty. \tag{10}$$

В некоторых случаях мы также будем предполагать, что

$$\bar h_k/\underline{h}_k\leqslant\beta<\infty. \tag{11}$$

Обозначим также через Φ_k множество сплайнов из Φ на сетке δ_k.

Теорема 2. *Пусть сплайн $s_k(x)\in\Phi_k$ интерполирует функцию $y(x)\in C^1[a, b]$ на сетке Δ_k, удовлетворяющей условиям* (10), (11), *причем $s_k'(x_i)=y'(x_i)$ для $x_i\in\Delta_k$. Если $s_k(x)$ удовлетворяет краевым условиям* (6) *и* $\sup(|\mu_{0_k}|, |\lambda_{N_k}|)<1+1/\alpha_1\alpha_2$, $\bar{h}_k(|d_{0_k}|+|d_{N_k+1}|)\to0$, $k\to\infty$, *или $y(x)$ и $s_k(x)$ периодичны с периодом $b-a$, то*

$$\max_{x\in[a,b]}|y^{(m)}(x)=s_k^{(m)}(x)|=o(\bar{h}^{1-m}),\qquad m=0, 1.$$

Если, кроме того, $y'(x)\in\mathrm{Lip}^\alpha[a, b]$, $0<\alpha\leqslant1$, то при условии равномерной ограниченности величин $\bar{h}_k^{1-\alpha}(|d_O|+|d_{N_k+1}|)$ справедлива оценка

$$\max|y^{(m)}(x)-s_k\ (x)|=O(\bar{h}^{1+\alpha-m}),\qquad m=0, 1.$$

Теорема 3. *Пусть сплайн $s_k(x)\in\Phi_k$ интерполирует функцию $y(x)\in C^2[a, b]$ на сетке Δ_k и $s_k'(x_i)=y'(x_i)$ для $x_i\in\Delta_k$, причем для последовательности сеток Δ_k выполняется условие* (11). *Если $s_k(x)$ удовлетворяет краевым условиям* (4) *или $s_k(x)$ и $y(x)$ периодичны с периодом $b-a$, то*

$$\max_{x\in[a,b]}|y^{(m)}(x)-s_k^{(m)}(x)|=o(\bar{h}^{2-m}),\qquad m=0, 1, 2.$$

Если $y''(x)\in\mathrm{Lip}^\alpha[a, b]$, $0<\alpha\leqslant1$, то

$$\max_{x\in[a,b]}|y^{(m)}(x)-s^{(m)}(x)|=O(\bar{h}^{2+\alpha-m}),\qquad m=0, 1, 2.$$

Теорема 4. *Пусть сплайн $s_k(x)\in\Phi_k$ интерполирует функцию $y(x)\in C^3[a, b]$ на сетке Δ_k и $s_k'(x_i)=y'(x_i)$, $x_i\in\Delta_k$, причем выполнено условие* (10). *Если $s_k(x)$ удовлетворяет краевым условиям* (4) *или* (5), *либо $s_k(x)$ и $y(x)$ периодичны с периодом $b-a$, то*

$$\max_{x\in[a,b]}|y^{(m)}(x)-s_k^{(m)}(x)|=o(\bar{h}_k^{3-m}),\qquad m=0, 1, 2, 3.$$

Если $y'''(x)\in\mathrm{Lip}^\alpha[a, b]$, $0<\alpha\leqslant1$, то

$$\max_{x\in[a,b]}|y^{(m)}(x)-s_k^{(m)}(x)|=O(\bar{h}^{3+\alpha-m}),\qquad m=0, 1, 2, 3.$$

Если в выражении (2) для сплайна $s(x)$ положить

$$y_i'=\lambda_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}+\mu_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i},$$

$$M_i=\frac{2}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)=y[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}],\qquad(12)$$

где $\lambda_i=1-\mu_i=h_i/(h_{i-1}+h_i)$, то сплайны с дополнительными узлами могут быть применены для решения задачи Лагранжа.

Теорема 5. *Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы непрерывная периодическая функция $y(x)$ и последовательность сеток Δ_k, удовлетворяющая условиям* (10), (11). *Если периодический кубический сплайн $s_k(x)$ на сетке δ_k интерполирует функцию $y(x)$ на сетке Δ_k и удовлетворяет условиям* (12), *то*

$$\max_{x\in[a, b]}|y(x)-s_k(x)|=o(1).$$

Если $y(x) \in \mathrm{Lip}^{\alpha}[a, b]$, $0<\alpha\leqslant 1$, *то*

$$\max_{x\in[a,\, b]} |y(x)-s_h(x)|=O(\bar{h}^{\alpha}).$$

4. Множество $S_{3,\,\delta}$ всех кубических сплайнов дефекта 1 на сетке δ образует $(2N+6)$-мерное пространство. Для $s(x) \in S_{3,\,\delta}$ имеем

$$s(x)=P_3(x)+\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=0}^{N} C_{k_i}\frac{(x-x_i-\alpha_k h_i)_+{}^3}{6},$$

где $P_3(x)$ — кубический полином от x. Следующая теорема указывает выбор пространства $S_{3,\,\delta}$, состоящего из функций с конечным носителем типа B-сплайнов Шенберга [4].

Теорема 6. *Базис пространства* $S_{3,\,\delta}$ *образуют следующие сплайны*:

$$\varphi_{\beta j},\ \beta=1,\, 2;\quad j=1, \ldots, N-1;\quad \varphi_{\alpha i},\ \alpha=1,\, 2,\, 3,\, 4;\quad i=0,\, N;$$

здесь

$$\varphi_{1j}=\varphi[x_{j-1}+\alpha_1 h_j,\ x_{j-1}+\alpha_2 h_j,\ x_j+\alpha_1 h_j,\ x_j+\alpha_2 h_j,\ x_{j+1}+\alpha_1 h_j;\ x],$$
$$\varphi_{2j}=\varphi[x_{j-1}+\alpha_2 h_j,\ x_j+\alpha_1 h_j,\ x_j+\alpha_2 h_j,\ x_{j+1}\alpha_1 h_j,\ x_{j+1}+\alpha_2 h_j;\ x),\quad j=1, \ldots, N-1;$$
$$\varphi_{10}(x)=\varphi[x_0,\ x_0+\alpha_1 h_0;\ x],\quad \varphi_{20}(x)=\varphi[x_0,\ x_0+\alpha_1 h_0,\ x_0+\alpha_2 h_0;\ x],$$
$$\varphi_{30}(x)=\varphi[x_0,\ x_0+\alpha_1 h_0,\ x_0+\alpha_2 h_0,\ x_1+\alpha_1 h_1;\ x],$$
$$\varphi_{40}(x)=\varphi[x_0,\ x_0+\alpha_1 h_0,\ x_0+\alpha_2 h_0,\ x_1+\alpha_1 h_1,\ x_1+\alpha_2 h_1;\ x],$$
$$\varphi_{1N}(x)=\psi[x;\ x_N+\alpha_2 h_N,\ x_{N+1}],\quad \varphi_{2N}(x)=-\psi[x;\ x_N+\alpha_1 h_N,\ x_N+\alpha_2 h_N,\ x_{N+1}],$$
$$\varphi_{3N}(x)=\psi[x;\ x_{N-1}+\alpha_2 h_{N-1},\ x_N+\alpha_1 h_N,\ x_N+\alpha_2 h_N,\ x_{N+1}],$$
$$\varphi_{4N}(x)=-\psi[x;\ x_{N-1}+\alpha_1 h_{N-1},\ x_{N-1}+\alpha_2 h_{N-1},\ x_N+\alpha_1 h_N,\ x_N+\alpha_2 h_N,\ x_{N+1}],$$
$$\varphi(t, x)=(t-x)_+{}^3,\quad \psi(x, t)=\varphi(t, x).$$

5. Сплайны из Φ были применены для получения квадрупольных формул. Отметим здесь тот интересный факт, что формулы численного интегрирования для кубических эрмитовых сплайнов с дополнительными узлами, удовлетворяющих условию (12), совпадают с соответствующими формулами для сплайнов пятой степени дефекта 3 из [1].

Авторы выражают искреннюю благодарность акад. Н. Н. Яненко за постоянное внимание и поддержку в работе.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
20 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш*, Теория сплайнов и ее приложения, М., 1972. [2] *Б. И. Квасов*, В кн: Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, т. 4, 1973, № 1, стр. 39. [3] *Н. Н. Яненко*, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, 1967. [4] *I. J. Schoenberg*, Quart. Appl. Math., v. 4, 45, 112 (1946).