Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 6

УДК 519.56 *МАТЕМАТИКА*

ХОАНГ ТУЙ (ДРВ)

ОБ ОДНОЙ АКСИОМАТИКЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 15 X 1973)

В этой заметке излагаются главные результаты общей теории необходимых условий первого порядка для экстремальных задач, включающей как частные случаи ряд ранее известных теорий (см. [1-5]).

1. Общая схема для экстремальных задач. Рассмотрим следующую задачу, которую будем называть $(G, M, \mathscr{B})$-задачей.

Пусть заданы произвольное множество D, линейное топологическое пространство Y, а также: 1) однозначное отображение G: $D\to Y$; 2) многозначное отображение M: $D\to 2^Y$; 3) многозначное отображение $\mathscr{B}$: $D\to 2^{2^D}$, поставляющее каждой точке $x\in D$ некоторый базис фильтра $\mathscr{B}(x)$ в D такой, что $x\in B\quad \forall B\in\mathscr{B}(x)$. Требуется найти элемент x^0, удовлетворяющий следующим условиям:

(I) $x^0\in D$, $G(x^0)\in\overline{M(x^0)}$ (замыкание множества $M(x^0)$);

(II) существует множество $B\in\mathscr{B}(x^0)$, при котором

$$0\notin \operatorname{int}(G(B)-M(x^0)). \tag{1}$$

Такой элемент x^0 будем называть $(G, M, \mathscr{B})$-критическим, или просто критическим, если никакое недоразумение не может возникать.

Оказывается, что к этой общей схеме можно свести по существу все экстремальные задачи, изученные до сих пор в вариационном исчислении, математическом программировании и теории оптимального управления. Чтобы это показать, приведем два примера.

Пример 1 (см. [2]). Пусть $M(x)=\{G(x)\}$ для каждого $x\in D$. В этом случае элемент $x^0\in D$ является критическим тогда и только тогда, когда существует такое множество $B\in\mathscr{B}(x^0)$, что $G(x^0)$ принадлежит границе множества $G(B)$.

Пример 2 (см. [4]). Пусть $Y=Y_1\times Y_2$, $G=G_1\times G_2$, где G_i: $D\to Y_i$, $i=1, 2$, $M(x)=M_1\times M_2$, где M_1 — фиксированный замкнутый выпуклый конус в Y_1, а M_2 — фиксированный открытый выпуклый конус в Y_2. В этом случае элемент x^0 будет критическим, если выполняется условие

а) существует множество $B\in\mathscr{B}(x^0)$, при котором система $x\in B$, $G_1(x)\in M_1$, $G_2(x)\in M_2$ несовместна.

Из этих примеров следует, в частности, что все экстремальные задачи, рассмотренные в [2] и [4], являются $(G, M, \mathscr{B})$-задачами (с надлежащими $G, M, \mathscr{B}$).

2. Основные необходимые условия критичности. Рассмотрим элемент x^0, удовлетворяющий условию (I). Регулярной выпуклой аппроксимацией $(G, M, \mathscr{B})$-задачи в точке x^0 называется любая тройка $(G', M', \mathscr{B}')$, состоящая из отображения G': $D'\to Y$ выпуклого конуса M' в Y и базиса фильтра $\mathscr{B}'$ в D' таких, что всякий раз, когда x^0 есть $(G, M, \mathscr{B})$-критический, найдутся множество $B'\in\mathscr{B}'$ и непрерывный линейный функционал $\Lambda\in M'^*$, удовлетворяющие условию

$$\langle\Lambda, G'(x)\rangle\leqslant 0\quad \forall z\in B' \tag{2}$$

(здесь, как обычно, через M'^* обозначен сопряженный конус к M'). При этом, если Λ можно всегда подобрать так, чтобы дополнительно к (2) имело место равенство

$$\langle \Lambda, G(x^0)\rangle = 0, \tag{3}$$

то регулярная выпуклая аппроксимация называется строгой.

Нас интересует, при каких условиях тройка (G', M', B') является регулярной выпуклой (строгой регулярной выпуклой) аппроксимацией данной $(G, M, \mathscr{B})$-задачи в данной точке x^0.

Предположим, что:

А1) $Y = Y_1 \times Y_2$, $Y_1 = R^k$, где k — некоторое неотрицательное целое число (таким образом, $G = G_1 \times G_2$, $G' = G_1' \times G_2'$, где $G_i\colon D \to Y_i$, $G_i'\colon D' \to Y_i$).

А2) $M(x^0) = M_1 \times M_2$, где M_1 — замкнутое выпуклое множество в Y_1, M_2 — множество с непустой внутренностью в Y_2; $M' = M_1' \times M_2'$, где M_1' — замкнутый выпуклый конус в Y_1, M_2' — открытый выпуклый конус в Y_2.

Введем следующее

Условие 1. Для каждой пары (Σ, V_1), где Σ — k-симплекс в Y_1 такой, что $O \in \Sigma \subset [G_1'(B') - M_1']$ *, а V_1 — окрестность точки $O \in Y_1$, существуют отображение $\zeta\colon \Sigma \to B$, окрестность V_2 точки $O \in Y_2$ и действительное число $\varepsilon \neq 0$, такие, что:

а) отображение $G_1\zeta$ непрерывно;

б) $G_1(\zeta(\sigma)) \in M_1 + \varepsilon(\sigma + V_1) \quad \forall \sigma \in \Sigma$

в) $G_2(\zeta(\Sigma)) + V_2 \subset M_2$.

Теорема 1. *Если каждому множеству $B \in \mathscr{B}(x^0)$ соответствует такое множество $B' \in \mathscr{B}'$, что условие 1 выполняется, то $(G', M', \mathscr{B}')$ является регулярной выпуклой аппроксимацией $(G, M, \mathscr{B})$-задачи в точке x^0.*

Предположим теперь, кроме А1) и А2), еще

Б1) M_1, M_2 — выпуклые конусы, причем M_2 является открытым и $M_i' = M_i - \alpha_i K_i$, где $\alpha_i = 0$ или $\alpha_i = 1$, $K_i = \{u \in Y_i\colon u = \mu G(x^0), \mu \geqslant 0\}$.

Б2) D' есть подмножество некоторого линейного топологического пространства Z и для каждого $B' \in \mathscr{B}'$ сужение G' на $[B']$ есть M-выпуклое отображение, т. е.

$$G'(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \in \alpha G'(x^1) + (1-\alpha)G'(x^2) + \overline{M}$$

для любых $x^1, x^2 \in [B']$ и любого $\alpha \in [0, 1]$.

Обозначим через $[B']_Y$ множество тех $z \in [B']$, которые можно представить в виде выпуклой комбинации не более чем $h = 1 + \dim Y$ элементов из B' (таким образом, $[B']_Y = [B']$, если $\dim Y < +\infty$). Введем следующее

Условие 1'. Для каждой тройки (S, η, V_2), где $S = [s^1, \ldots, s^{k+1}]$ — симплекс в $[B']$ такой, что $s^i \in [B']_Y$, $O \in G'_1(S) - M_1'$, $G_2'(S) \subset M_2'$, η — положительное число, V_2 — окрестность точки $O \in Y_2$, существуют два числа $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и отображение $\xi\colon S \to B$ такие, что $\varepsilon_1 > 0$ при $M_1 \neq \{0\}$, $\alpha_i(\varepsilon_i - \eta) \leqslant 0$, $i = 1, 2$, и

а) отображение $G_1\xi$ непрерывно;

б) $G_1(\xi(z)) - \alpha_1 G_1(x^0) \in M_1 + \varepsilon_1(G_1'(z) + V_1) \quad \forall z \in S, \quad V_1 = \{y_1 \in Y_1\colon |y_1| < \eta\}$;

в) $G_2(\xi(S)) - \alpha_2 G_2(x^0) \subset \overline{M}_2 + \varepsilon_2([G_2'(S)] + V_2)$.

Теорема 1'. *Если каждому множеству $B \in \mathscr{B}(x^0)$ соответствует такое множество $B' \in \mathscr{B}'$, что условие 1' выполняется, то $(G', M', \mathscr{B}')$ является строгой регулярной выпуклой аппроксимацией $(G, M, \mathscr{B})$-задачи в $x^0 = 0$.*

Теорема 1 доказывается на основании принципа неподвижной точки Какутани, а теорема 1' на основании теоремы 1.

3. Частные случаи условий 1 и 1'. Чтобы специализировать условия 1 и 1', нам нужно ввести некоторые понятия. Предположим, что имеют место А1, А2, Б1, Б2, а также

А3) $D \subset Z$, пространство Z отделимо и D' есть выпуклое множество в Z. Пусть L — некоторое подпространство пространства Z.

* Через $[A]$ обозначена выпуклая оболочка множества A.

Определение 1. Пара (G_i', M_i') называется L-дифференциалом пары (G_i, M_i) в точке $x^0=0$, если: 1) G_i' есть M_i'-выпуклое отображение; 2) для каждой пары (z, V_i), где $z\in D'\cap L$, V_i — окрестность точки $O\in Y_i$, существуют окрестность N точки $O\in Z$ и число $\delta>0$ такие, что $G_i(\varepsilon z')\in \in M_i+\varepsilon(\sigma+V_i)$, коль скоро $\sigma\in G_i'(z)-M_i'$ $z'\in z+U\cap L$, $\varepsilon z'\in D$, $0<\varepsilon<\delta$.

В случае, когда $L=Z$, будем просто говорить «дифференциал» (вместо Z-дифференциал). Если же пара (G_i', M_i') есть L-дифференциал от (G_i, M_i) в $x^0=0$ для любого m-мерного подпространства L в Z, то будем ее называть также (m)-дифференциалом от (G_i, M_i) в $x^0=0$.

Нетрудно проверить, что определенное выше понятие L-дифференциала обобщает классическое понятие дифференциала и также понятие дифференциала, введенное, например в ([4]).

Определение 2. Пара (G_2', M_2') называется L-внутренней аппроксимацией пары (G_2, M_2) в точке $x^0=0$, если: 1) G_2' есть M_2'-выпуклое отображение и 2) для каждого $z\in D'\cap L$, удовлетворяющего условию $G_2'(z)\in \operatorname{int} M_2'$, существуют окрестность U точки $O\in Z$, окрестность V_2 точки $O\in Y_2$ и число $\delta>0$ такие, что $G_2(\varepsilon z')+\varepsilon V_2\subset M_2$, коль скоро $z'\in \in z+U\cap L$, $\varepsilon z'\in D$, $0<\varepsilon<\delta$.

В случае, когда $L=Z$, будем просто говорить «внутренняя аппроксимация» (вместо «Z-внутренняя аппроксимация»). Если же пара (G_2', M_2') есть L-внутренняя аппроксимация (G_2, M_2) в $x^0=0$ для любого m-мерного подпространства L в Z, то будем ее называть также (m)-внутренней аппроксимацией (G_2, M_2) в $x^0=0$.

Нетрудно проверить, что при $Y_2=Z$, $G_2=G_2'=\mathrm{id}$, пара (G_2', M_2') будет внутренней аппроксимацией (G_2, M_2) в $x^0=0$, если для каждого $z\in D'\cap M_2'$ существуют окрестность U точки $O\in Z$ и число $\delta>0$ такие, что $\varepsilon(z+U)\cap \cap D\subset M$, как только $0<\varepsilon<\delta$.

Определение 3. Множество $B'\in\mathscr{B}'$ называется (L, G)-смежным к множеству $B\in\mathscr{B}(x^0)$ в точке $x^0=0$, если для каждой системы (S, V_1, V_2, U, δ), где $S=[s^1, \ldots, s^{k+1}]$ — симплекс в $L\cap[B']$ с $s^i\in[B']_Y$, V_i — окрестность точки $O\in Y_i$, $i=1, 2$, U — окрестность точки $O\in Z$, δ — положительное число, существуют отображения u: $S\to D$, ξ: $S\to B$ и число $\varepsilon\in(0, \delta)$ такие, что: 1) отображение $G_1\xi$ непрерывно; 2) для каждого $z\in S$ имеем $u(z)\in\varepsilon(z+U\cap L)$, $G_i(\xi(z))\in G_i(u(z))+\varepsilon V_i$. $i=1, 2$. В случае, когда $L=Z$, будем просто говорить «G-смежный» (вместо «(Z, G)-смежный»).

Используя определенные выше понятия, можно сформулировать.

Условие 2. Существует такое семейство $\mathscr{L}$ подпространств пространства Z, что:

а) каждый m-симплекс $S\subset[B']$, $m\leqslant k$, при котором $O\in G_1'(S)-M_1'$, $G_2'(S)\subset M_2'$, содержится в некотором $L\in\mathscr{L}$;

б) для каждого $L\in\mathscr{L}$ множество B' (L, G)-смежно к множеству B, пара (G_1', M_1') является L-дифференциалом от (G_1, M_1), а пара (G_2', M_2') — L-внутренней аппроксимацией (G_2, M_2) в точке $x^0=0$.

Условие 2'. Существует такое семейство $\mathscr{L}$ подпространств пространства Z, что:

а) каждый m-симплекс $S\subset[B']$, $m\leqslant k$, при котором $O\in G_1'(S)-M_1'$, $G_2'(S)\subset M_2'$ содержится в некотором $L\in\mathscr{L}$;

б) для каждого $L\in\mathscr{L}$: множество B' (L, G)-смежно к множеству B, а (G_i', M_i'), $i=1, 2$, являются L-дифференциалами от (G_i, M_i) в точке $x^0= =0$. При этом сужение G_1' на каждом симплексе $S\subset[B']$ есть непрерывное отображение.

Теорема 2. *При предположениях* А1, А2, А3, (А1, А2, А3 *и* Б1, Б2), *если каждому* $B\in\mathscr{B}(x^0)$ *соответствует такое* $B'\in\mathscr{B}'$, *что условие* 2 (*условие* 2') *выполняется, то* $(G', M', \mathscr{B}')$ *является регулярной выпуклой* (*строгой регулярной выпуклой*) *аппроксимацией* $(G, M, \mathscr{B})$-*задачи в точке* $x^0=0$.

4. Дальнейшие специализации условий 1 и 1'. Укажем некоторые важные случаи, когда множество B' (L, G)-смежно к B.

Определение 4. Множество B' называется $(L, k+1)$-смежным к множеству B в точке $x^0=0$, если для каждой тройки (S, U, δ), где $S=[s^1, \ldots, s^{k+1}]$ — симплекс в $L\cap[B']$ с $s^i\in[B']_Y$, U — окрестность точки $O\in Z$, а δ — положительное число, существуют непрерывное отображение $\xi: S\to B$ и число $\varepsilon\in(0, \delta)$ такие, что $\xi(z)\in\varepsilon(z+U\cap L)$ $\forall z\in S$.

Множество B' называется $(L, k+1)_*$-смежным к множеству B (в точке $x^0=0$), если для каждой тройки (S, U, ε), где $S=[s^1, \ldots, s^{k+1}]$ — симплекс в $L\cap[B']$ с $s^i\in[B']_Y$, U — окрестность точки $O\in Z$, а ε — число из интервала $(0, 1)$, существует непрерывное отображение $\xi: S\to B$ такое, что $\xi(z)\in\varepsilon(z+U\cap L)$ $\forall z\in S$.

Для простоты в случае, когда $L=Z$, будем говорить «$(k+1)$-смежный» (или $(k+1)_*$-смежный), вместо «$(Z, k+1)$-смежный» (или «$(Z, k+1)_*$-смежный»).

Легко видеть, что если базис фильтра $\mathscr{B}$ — квазивыпуклый в смысле ([2]), то каждому $B\in\mathscr{B}$ соответствует такое $B'\in\mathscr{B}$, что B' $(k+1)_*$-смежно к B в точке $x^0=0$.

Лемма. *Множество B' будет (L, G)-смежным к множеству B, если выполняется одно из следующих двух условий:*

1) *отображение G_1 непрерывно и множество B' $(L, k+1)$-смежно к B в точке $x^0=0$;*

2) *отображение G_1 непрерывно, множество B' $(L, k+1)$-смежно к B, а множество D $(k+1)$-конечно-открыто в точке $x^0=0$ в том смысле, что для любого $(k+1)$-мерного подпространства L пространства Z $x^0=0$ является внутренней точкой множества $D\cap L$ в топологии L.*

На основании леммы сформулируем частные случаи условий 2 и 2′:

Условие 3. G_1 непрерывно, B' $(k+1)$-смежно к B, (G_1', M_1') есть дифференциал от (G_1, M_1), а (G_2', M_2') есть внутренняя аппроксимация (G_2, M_2) в точке $x^0=0$.

Условие 3′. G_1 непрерывно, B' $(k+1)$-смежно к B, (G', M') есть дифференциал от (G, M) в точке $x^0=0$, а G_1' может быть продолжено до M_1'-выпуклого отображения, определенного на некотором открытом выпуклом множестве, содержащем D'.

Условие 4. G непрерывно, D $(k+1)$-конечно-открыто, B' $(k+1)_*$-смежно к B, (G_1', M_1') есть $(k+1)$-дифференциал от (G_1, M_1), а (G_2', M_2') есть $(k+1)$-внутренняя аппроксимация (G_2, M_2) в $x^0=0$.

Условие 4′. G непрерывно, D $(k+1)$-конечно-открыто, B' $(k+1)_*$-смежно к B, (G', M') есть $(k+1)$-дифференциал от (G, M) в точке $x^0=0$, а G_1' может быть продолжено до M_1'-выпуклого отображения, определенного на некотором открытом выпуклом множестве, содержащем D'.

Теорема 3. *При предположениях* А1, А2, А3 *и* (А1, А2, А3 *и* Б1, Б2), *если каждому $B\in\mathscr{B}(x^0)$ соответствует такое $B'\in\mathscr{B}'$, что условие* 3 *или* 4 (*условие* 3′ *или* 4′) *выполняется, то $(G', M', \mathscr{B}')$ является регулярной выпуклой (строгой регулярной выпуклой) аппроксимацией $(G, M, \mathscr{B})$-задачи в точке $x^0=0$.*

Из этой теоремы непосредственно вытекают основные результаты Халкина ([5]) и Нейштадта ([3]), а также основная теорема Гамкрелидзе и Харатишвили ([2]). Что касается основных результатов Нейштадта ([4]), то они могут быть легко выведены из наших теорем 1′ и 2. Следует также заметить, что во всех упомянутых работах $M_1'=\{0\}$, в то время как в некотором классе задач естественнее предполагать, как мы сделали выше, что M_1' есть некоторый замкнутый выпуклый конус.

Поступило
21 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 5, 395 (1965). [2] *Р. В. Гамкрелидзе, Г. Л. Харатишвили*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 33, 721 (1969). [3] *L. V. Neustadt*, SIAM J. Control., v. 4, 505 (1966). [4] *L. V. Neustadt*, J. Comp. and Syst. Sci., v. 3, 57 (1969). [5] *H. Halkin*, J. Opt. Theory and Appl., v. 6, 138 (1970).