Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 1

МАТЕМАТИКА

А. А. АРСЕНЬЕВ

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И СУЩЕСТВОВАНИЕ В МАЛОМ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 20 II 1974)

1. Эволюция плотности электронов $F^-(x, p, t)$ и ионов $F^+(x, p, t)$ достаточно разреженной плазмы в приближении самосогласованного поля описывается системой уравнений Власова

$$-\Delta\varphi=4\pi e\int(F^+(x,p,t)-F^-(x,p,t))\,dp,$$
$$\frac{\partial F^\pm}{\partial t}+\frac{1}{m_\pm}\left\langle p,\frac{\partial F^\pm}{\partial x}\right\rangle\mp e\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial F^\pm}{\partial p}\right\rangle=0; \tag{1}$$

здесь x, p — точки трехмерного эвклидова пространства R_3, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в R_3, φ — потенциал самосогласованного поля, e — заряд электрона, $m_\pm$ — массы иона и электрона.

Доказано [1], что в одномерном случае система (1) имеет единственное классическое решение в целом, вопрос о единственности и существовании классического решения системы (1) в многомерном случае, насколько нам известно, был открыт.

2. Определение. Совокупность трех функций $\{\varphi(x, t), F^\pm(x, p, t)\}$ мы называем классическим решением системы (1) на интервале $(0, t_0)$, если:

1) для всех $t\in[0, t_0)$ функция $\varphi(x, t)\in C^{(2,\alpha)}(R_3)$ при некотором $\alpha>0$ и непрерывна по t в метрике $C^{(2,\alpha)}(R_3)$ на интервале $[0, t_0)$;

2) функции $F^\pm(x, p, t)$ непрерывно дифференцируемы по x, p, t и интегрируемы по p при всех $x\in R_3$, $t\in(0, t_0)$;

3) выполнены равенства (1).

Теорема 1. *Если начальные функции $F_0^\pm(x, p)$ дважды непрерывно дифференцируемы и существуют такие константы $\delta>0$, $C<\infty$, что*

$$\sum_{0\leqslant|l|\leqslant2}|D_{x,p}^lF_0^\pm(x,p)|<C\exp(-\delta(|x|+|p|)),$$

то на некотором интервале $(0, t_0)$, $t_0>0$, существует единственное классическое решение системы (1).

3. Приведем основные этапы доказательства теоремы 1. Пусть T — достаточно большое положительное число и $C(\alpha, T)$ — банахово пространство функций, непрерывных по t в метрике $C^{(2,\alpha)}(R_3)$, норму в $C(\alpha, T)$ зададим равенством

$$\|\varphi\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\varphi(x, t)\|_{2,\alpha};$$

$\|\cdot\|_{2,\alpha}$ — норма в $C^{(2,\alpha)}(R_3)$, $\quad 0<\alpha<1$.

Функции $\varphi\in C(\alpha, T)$ поставим в соответствие отображение $S^\pm_{-t}(\varphi)$: $R_3\oplus R_3\to R_3\oplus R_3$, которое точку $q=(\xi, \eta)\in R_3\oplus R_3$ переводит в точку $Q^\pm(q, t)=S_{-t}^\pm(\varphi)(q)=(X^\pm(\xi, \eta, t), P^\pm(\xi, \eta, t))$, где $(X^\pm, P^\pm)$ — значения решения системы уравнений

$$\frac{dX^\pm}{d\tau}=-\frac{1}{m_\pm}P^\pm,\qquad \frac{dP^\pm}{d\tau}=\pm e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)(X^\pm,t-\tau),\qquad X^\pm(\xi,\eta,0)=\xi,\quad P^\pm(\xi,\eta,0)=\eta \tag{2}$$

в точке $\tau=t$.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{0\leqslant|l|\leqslant 2}|D_q{}^lF_0{}^\pm(Q^\pm)|<C\exp(-\delta(|\eta|+|\xi-\eta t|m_\pm|)).$$

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$\left|\frac{\partial}{\partial q}S_{-t}{}^\pm(\varphi)(q)\right|<C;$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial q}S_{-t}{}^\pm(\varphi)(q+\Delta q)-\frac{\partial}{\partial q}S_{-t}{}^\pm(\varphi)(q)\right|<C|\Delta q|^\alpha;$$

$$|S_{-t}{}^\pm(\varphi_1)(q)-S_{-t}{}^\pm(\varphi_2)(q)|<C\|\varphi_1-\varphi_2\|;$$

$$|[S_{-t}{}^\pm(\varphi_1)(q+\Delta q)-S_{-t}{}^\pm(\varphi_2)(q+\Delta q)]-[S_{-t}{}^\pm(\varphi_1)(q)-S_{-t}{}^\pm(\varphi_2)(q)]|<$$
$$<C|\Delta q|^\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

Константа в леммах 1, 2 не зависит только от $\|\varphi\|$, $\|\varphi_1\|$, $\|\varphi_2\|$ и $F_0{}^\pm$. Определим оператор

$$P(t_0,\varphi):\ [0,T]\times C(\alpha,T)\to C(\alpha,T)$$

формулой

$$P(t_0,\varphi)=\varphi(x,t)-$$
$$-e\int|x-\xi|^{-1}[F_0{}^+(S_{-\tau}{}^+(\varphi)(\xi,\eta))+F_0{}^-(S_{-\tau}{}^-(\varphi)(\xi,\eta))]|_{\tau=\min(t,t_0)}\,d\xi\,d\eta.$$

При $t_0=0$ уравнение

$$P(t_0,\varphi)=0 \tag{3}$$

имеет единственное решение

$$\varphi(x,t)\equiv\varphi_0(x)=e\int|x-\xi|^{-1}[F_0{}^+(\xi,\eta)-F_0{}^-(\xi,\eta)]d\xi\,d\eta.$$

Легко видеть, что уравнение (3) эквивалентно системе (1). Леммы 1 и 2 позволяют проверить, что оператор $P(t_0,\varphi)$ непрерывен по совокупности переменных, имеет непрерывную производную Гато по φ, причем $P_\varphi'(0,\varphi_0)=E$. Отсюда в силу теоремы о неявной функции ([2], стр. 614) следует, что уравнение (3) имеет единственное решение в некоторой окрестности точки $t_0=0$.

Автор выражает благодарность участникам семинара под руководством чл.-корр. АН СССР А. А. Самарского за обсуждение результатов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. В. Иорданский,* Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 60, 181 (1961). [2] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов,* Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.