

Р. И. АЮКАЕВ, В. К. КИВРАН, М. Э. АЭРОВ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА ИЗВИЛИСТОСТИ ЗЕРНИСТОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 15 II 1974)

Сложная геометрическая структура зернистого слоя делает практически неосуществимым аналитическое решение уравнений движения сквозь него вязкой жидкости даже при полном пренебрежении силами инерции и соответствующей этому линеаризации исходных уравнений⁽¹⁾. Поэтому для теоретического вывода зависимости перепада давлений от скорости потока, физико-химических свойств жидкости и геометрических характеристик зернистого слоя используют различные весьма идеализированные модели структуры этого слоя. В практике гидравлических расчетов широкое применение получила (несмотря на ограниченные возможности) капиллярная модель или модель идеального грунта⁽²⁾. Этому способствовали простота гидравлических зависимостей, полученных на основе этой модели, их удовлетворительное совпадение с опытом при введении минимального количества поправочных эмпирических коэффициентов⁽³⁾. Одним из таких коэффициентов в формуле расчета потери напора на участке длины капилляра является коэффициент его извилистости $T=l/l_0$, где l — средняя длина участка капилляра, l_0 — ее проекция на направление общего потока жидкости. Для определения этого коэффициента используют метод визуальных наблюдений⁽⁴⁾, метод электроанalogии^(5, 6).

В настоящей работе излагается новый метод оценки этого коэффициента, основанный на математическом моделировании пористой структуры. Идея математического моделирования пористой структуры заключается в том, что для некоторого представительного объема пористой среды на ЭЦВМ производится имитация случайного (с заданной плотностью) заполнения пространства (цилиндр, сфера, куб и т. п.) составляющими ее частицами (сфера, эллипсоид, многогранник и т. п.)⁽⁷⁻⁹⁾. Необходимые координаты частиц (число координат увеличивается с усложнением формы частиц) и числовые значения их физических свойств (в целом обобщенные координаты) записываются и хранятся в запоминающем устройстве ЭЦВМ в виде матриц. Количество строк в матрице определяется числом элементов в представительном объеме, число столбцов — числом обобщенных координат. Матрица рассчитывается по специальным моделирующим программам, построение которых зависит от плотности заполнения и формы частиц. Статистическое исследование физико-структурных свойств построенной таким образом модели приводится по другим программам на той же ЭЦВМ.

Коэффициент T показывает относительное удлинение капилляра, которое имеет место в реальных структурах за счет искривления траектории жидкости при концентрации заполнителя (плотности структуры), отличной от нуля, и служит оценкой наименьшей длины капилляра в данной структуре (рис. 1а). Очевидно, при полном отсутствии заполнителя длина капилляра равна толщине образца $l=l_0$, а коэффициент извилистости $T=1$. Поскольку распределение заполнителя по размерам и в пространстве случайно, то величина T является случайной функцией двух координат сечения образца (положим, x и y) и приобретает статистическую устойчи-

вость лишь при осреднении по числу N капилляров:

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i \quad (1)$$

Характеристикой степени однородности материала в отношении величины коэффициента извилистости служит положительное значение корня квадратного из дисперсии коэффициента извилистости:

$$S(T) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2} \quad (2)$$

Чем меньше $S(T)$, тем однороднее материал. Вместе с тем абсолютная величина среднеквадратичного отклонения зависит не только от степени однородности материала, но и от абсолютного значения средней величины коэффициента извилистости. Эти отклонения в крупнопористом материале чаще всего бывают больше, чем в мелкопористом. Наименьшую длину капилляра l_i между точками A и B (рис. 16) найдем как длину пути жидкости по кратчайшей геодезической кривой

$$l_i = l_0 + \sum_{j=1}^N (l_j' - l_j), \quad (3)$$

где l_0 — толщина образца, l_j — хорда в j -й сфере, пересекаемой прямой AB ; l_j' — длина наименьшей дуги, стягиваемой хордой l_j ; n — число сфер, пересекаемых отрезком AB . Второе слагаемое представляет собой добавку к длине капилляра за счет его искривления при наличии заполнителя.

Коэффициент извилистости $T(x, y)$ запишем тогда в виде

$$T(x, y) = \frac{l(x, y)}{l_0} = 1 + \frac{1}{l_0} \sum_{j=1}^n [l_j'(x, y) - l_j(x, y)]. \quad (4)$$

Преобразуем это выражение. Учитывая (см. рис. 16), что

$$l_j'(x, y) = 2r_j \alpha, \quad l_j(x, y) = 2r_j \sin \alpha, \\ \cos \alpha = \frac{\delta_j(x, y)}{r_j} = \frac{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}}{r_j}, \quad (5)$$

запишем выражение (4) в форме, удобной для расчета на ЭЦВМ:

$$T(x, y) = 1 + \frac{1}{l_0} \sum_{j=1}^n 2r_j \left[\text{Arcsin} \sqrt{1 - \frac{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}{r_j^2}} - \sqrt{1 - \frac{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}{r_j^2}} \right], \quad (6)$$

где x_j, y_j — координаты j -й сферы радиусом r_j .

Очевидно, что значение коэффициента извилистости будет разное в различных точках плоскости xOy и для случайных упаковок сфер это

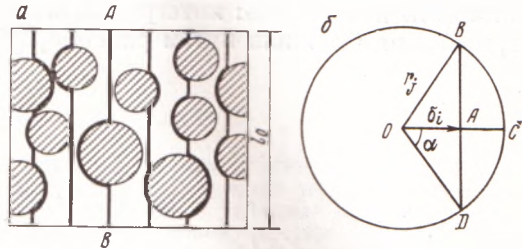


Рис. 1. Схема вычисления длины минимального капилляра

значение будет иметь случайный характер с некоторым средним значением, дисперсией и корреляционной функцией. Процедура вычисления этих статистических характеристик следующая. Как обычно, проводится математическое моделирование случайного заполнения гипотетического контейнера кубической формы с ребром, равным единице. Вычисление коэффициента извилистости производится параллельно третьей оси координат (аппликате), для значений абсциссы и ординаты в диапазоне 0,25–0,75 (во избежание влияния граничного эффекта). При этом могут быть использованы два способа: интегрирование и осреднение $T(x)$ с шагом интегрирования $0,1 r$ или путем равномерной выборки $T(x)$. В обоих слу-

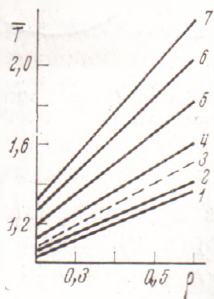


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость коэффициента извилистости от плотности заполнения и гранулометрического состава загрузки: 1 — $r_1 : r_2 = 1 : 3$, $f_1 : f_2 = 5 : 1$; 2 — $r_1 : r_2 = 1 : 3$, $f_1 : f_2 = 27 : 1$; 3 — $r_1 = r_2$; 4 — $r_1 : r_2 = 1 : 5$, $f_1 : f_2 = 5 : 1$; 5 — $r_1 : r_2 = 1 : 5$, $f_1 : f_2 = 27 : 1$; 6 — $r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 2 : 3$, $f_1 : f_2 : f_3 = 3 : 2 : 1$; 7 — $r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 2 : 3$, $f_1 : f_2 : f_3 = 27 : 4 : 1$

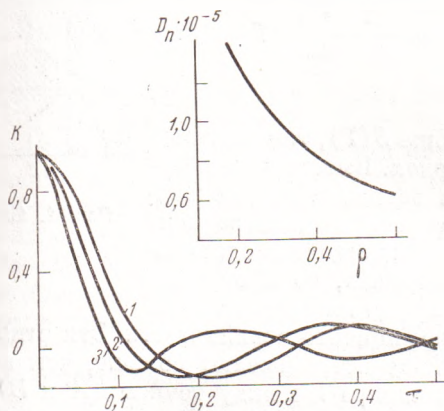


Рис. 3

Рис. 3. Дисперсия D_n и корреляционная функция K коэффициента извилистости. 1 — $r=0,05$, $\rho=0,30$; 2 — $r=0,05$, $\rho=0,61$; 3 — $0,008 \leq r \leq 0,05$, $\rho=0,59$

чаях шаг аргумента выбирается в $0,1 r$ (r — радиус сфер), вполне достаточный для описания кривой корреляционной функции. В представленных ниже результатах цифрового эксперимента выбиралось по 10 сечений, в каждом сечении по 100 точек; сечения располагались на расстоянии радиуса одно от другого. Вычисленные значения осреднялись по всем (до нескольких десятков) реализациям однотипных случайных упаковок.

По описанной выше методике произведено вычисление коэффициента извилистости, его дисперсии и корреляционной функции для упаковок равных и распределенных сфер с различной плотностью заполнения. На рис. 2 представлена зависимость среднего коэффициента извилистости от плотности заполнения ρ для различных гранулометрических составов. В диапазоне $\rho=0,2-0,6$ T линейно увеличивается с увеличением плотности заполнения. Коэффициент извилистости увеличивается также при увеличении числа компонентов. Приведенные результаты согласуются с данными определения T по методу электроанalogии (⁵, ⁶). Дисперсия коэффициента извилистости (рис. 3) с увеличением плотности заполнения монотонно уменьшается, что указывает на возрастание однородности материала. По величине дисперсия T весьма мала. Вид рассчитанных корреляционных функций также приведен на рис. 3. Приведенные значения коэффициента извилистости и его статистических характеристик могут быть использованы в гидравлических расчетах движения жидкости через зернистые пористые среды при их представлении капиллярной моделью

(10). Аналогичные расчеты структурных характеристик могут быть произведены для упаковок из элементов неизотермической формы. Изложенное свидетельствует о значительных возможностях исследования зернистых материалов методом математического моделирования их структуры.

Куйбышевский инженерно-строительный институт
им. А. И. Микояна

Поступило
30 I 1974

Научно-исследовательский институт
синтетических спиртов и органических продуктов
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Я. Полубаринова-Кочина, Теория движения грунтовых вод, М., 1952.
² С. А. Лейбензон, Движение природных жидкостей и газов через пористую среду, 1947.
³ М. Э. Азров, О. М. Тодес, Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем, Л., 1968.
⁴ P. C. Carman, Flow of Gases through Porous Media, London, 1956.
⁵ R. V. Macmillan, B. A. Muccini, Am. Inst. Chem. Eng. J., v. 2, 3, 393 (1956).
⁶ Д. К. Коллеров, Хим. пром., т. 2, 163 (1959).
⁷ В. А. Воробьев, В. К. Кивран, А. Э. Наац, Изв. Томск. политехнич. инст., Томск, т. 213 (1972).
⁸ Р. И. Аюкаев, В. К. Кивран, Сборн. Вопросы надежности железобетонных конструкций, Куйбышев, т. 2, 269 (1973).
⁹ Р. И. Аюкаев, В. К. Кивран, Сборн. Вопросы проектирования оснований и фундаментов зданий и сооружений, Куйбышев, 1973.
¹⁰ А. Б. Казанский, ДАН, т. 210, № 3, 552 (1973).