

Е. П. КУРУШИН, Е. И. НЕФЕДОВ

ДИФРАКЦИЯ НА ОТКРЫТОМ КОНЦЕ ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА СО СЛЕГКА ПРОЗРАЧНЫМИ СТЕНКАМИ

(Представлено академиком А. М. Прохоровым 14 XII 1973)

1. Открытые волноведущие и резонансные системы находят в настоящее время широкое применение в науке и технике (¹⁻³) в связи с широким освоением диапазона миллиметровых, субмиллиметровых и световых волн. Изучение поведения электромагнитных волн в таких системах составляет предмет асимптотической теории дифракции (⁴⁻⁷). Получаемые в асимптотической теории результаты обычно выражаются через дифракционную $U(s, p)$ -функцию Вайнштейна или обобщенную дзета-функцию Римана от комплексного аргумента, подробно протабулированные в работах (^{8, 9}). Теория открытого резонатора с плоскими зеркалами, построенная в (¹), предполагает, что зеркала резонатора идеально отражающие. Вместе с тем известно, что одно из зеркал квантового генератора может быть слегка прозрачным. Аналогичные задачи возникают и при излучении из широких отверстий, закрытых полупрозрачными пленками, решетками и т. п. (⁵). Теория таких устройств может быть построена по аналогии с (¹). Здесь решается задача об излучении волны волновода из конца полубесконечного волновода с малопрозрачными стенками.

2. Пусть плоский ($\partial/\partial y=0$) волновод ($z \in (-\infty, 0]$, $x \in [-a, a]$) образован двумя параллельными диэлектрическими пластинами малой толщины d , $kd \ll 1$, с комплексной проницаемостью $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ (рис. 1). С самого начала предположим, что волновод широкий: $kb \gg 1$, $b=2a$. Излученное из волновода поле будем описывать при помощи векторного потенциала

$$A = \frac{1}{c} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{j} dV, \quad A = \frac{i}{c} \int_S \frac{e^{ikR}}{R} YE dS. \quad (1)$$

В отличие от работ (^{1, 2}) здесь $\mathbf{j}$ — объемная плотность тока, равная плотности тока поляризации диэлектрика: $\mathbf{j}_{\text{пол}} = ik(\epsilon - 1)\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля в данной точке диэлектрика.

Учитывая малую толщину пластин d и рассматривая не слишком большие $|\epsilon|$, а такие, что $|\kappa d| \ll 1$ (κ — поперечное волновое число), можно перейти к поверхностной плотности тока $\mathbf{j}_{\text{пол}}^s = ikd(\epsilon - 1)\mathbf{E}$, уже считая стенки волновода бесконечно тонкими и выбирая значение E , соответствующее средней линии в диэлектрике. В этом случае величина $Y = kd(\epsilon - 1)$ тождественна некоторой эквивалентной комплексной проводимости стенок волновода. С учетом этой замены уравнение (1) может быть переписано в виде второго выражения в (1).

Выразив E через A , придем к интегральному уравнению задачи:

а) для волн 1 и 2 типов

$$E_x(a, z) = -\frac{4}{4} ikY \int_0^\infty l_{1,2}(|z-\xi|) E_x(a, \xi) d\xi, \quad (2)$$

где $l_{1,2} = H_0^{(1)}(k|z-\xi|) \pm H_0^{(1)}(k((z-\xi)^2 + b^2)^{1/2})$ — ядро, являющееся четной функцией разности $z-\xi$; $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля;

б) для волн 3 и 4 типов

$$E_z(a, z) + \frac{i}{4k} Y \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_0^\infty l_{3,4}(|z-\xi|) E_z(a, \xi) d\xi = 0. \quad (3)$$

Интегральное уравнение (2) и интегродифференциальное уравнение (3) могут быть решены методом Винера — Хопфа — Фока ⁽⁴⁾. Рассмотрим подробно решение уравнения (2); для (3) выпишем лишь окончательный

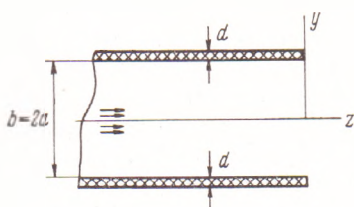


Рис. 1

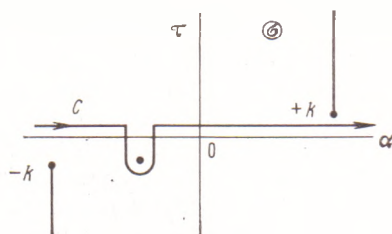


Рис. 2

результат. Уравнение (2) есть уравнение типа Винера — Хопфа. Преобразование Фурье уравнения (2) имеет вид

$$\mathcal{E}_x^+(\sigma) + \mathcal{E}_x^-(\sigma) = 1/2 ik Y L(\sigma) \mathcal{E}_x^+(\sigma). \quad (4)$$

Перепишем (4) в виде

$$\mathcal{E}_x^+(\sigma) [1 + 1/2 ik Y L(\sigma)] + \mathcal{E}_x^-(\sigma) = 0. \quad (5)$$

Это функциональное уравнение может быть решено, если удастся представить функцию $K(\sigma) = 1 + 1/2 ik Y L(\sigma)$ в виде двух сомножителей $K(\sigma) = K_+(\sigma) K_-(\sigma)$, регулярных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости $\sigma = \alpha + i\tau$ и не имеющих в них нулей: $\tau > -\text{Im } k$, $\tau < \text{Im } k$, $k = k' + ik''$.

Для волн 1 и 2 типов функция $L(\sigma)$ имеет вид

$$L(\sigma) = \frac{1}{\kappa} (1 \pm e^{ib\kappa}), \quad \kappa^2 = k^2 - \sigma^2,$$

так что

$$K(\sigma) = \left(1 + \frac{ik}{2\kappa} Y \right) \left(1 \pm \frac{(ik/2\kappa) Y}{1 + (ik/2\kappa) Y} e^{ib\kappa} \right). \quad (6)$$

Окончательно получим

$$E_x = \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \int_c [K_+^{-1}(\sigma) + K_-(\sigma)] e^{-i\sigma z} d\sigma. \quad (7)$$

Контур интегрирования охватывает сверху полюс $K_+(\sigma) = 0$, соответствующий падающей на открытый конец волновода волне с амплитудой A (рис. 2).

Для волн 3 и 4 типов вместо уравнения (5) получим

$$\mathcal{E}_z^+(\sigma) \left[1 + \frac{i\kappa}{2k} YL(\sigma) \right] + \mathcal{E}_z^-(\sigma) = 0, \quad (8)$$

где $K(\sigma) = 1 + (i\kappa/2k) YL(\sigma)$.

3. Уравнение (7) позволяет решить поставленную задачу, однако факторизация функций $1 + (i\kappa/2) YL(\sigma)$ и $1 + (i\kappa/2k) YL(\sigma)$ в общем случае довольно сложна. Имея в виду обобщение теории открытых резонаторов на случай неидеальных стенок, можно сразу заменить функции $K(\sigma)$ более простыми, используя обычные для открытых резонаторов ограничения $|\sigma| \ll k$, $(b/k^3) |\sigma|^4 \ll 1$, смысл которых заключается в том, что в волноводе распространяются плоские бриллюэновские волны, падающие почти нормально на боковые стенки ('). В этом случае для волн 1 и 2 типов

$$K(\sigma) = \left(1 + \frac{i}{2} Y \right) \left(1 \pm \frac{iY}{2+iY} e^{i\kappa b} \right) \quad (9)$$

и для 3 и 4 типов

$$K(\sigma) = (1 - 2iZ) \left(1 \pm \frac{1}{1 - 2iZ} e^{i\kappa b} \right), \quad Z = Y^{-1}. \quad (10)$$

Множители перед экспонентой в (9) и (10) представляют собой коэффициенты отражения R от стенок волновода, которые в общем случае имеют вид $R = \exp\{-i \cdot 2\pi\rho\}$, $\rho = \rho' - i\rho''$, так что факторизация функций $K(\sigma)$ сводится к факторизации выражения

$$1 \pm R e^{i\kappa b} = 1 \pm e^{2i(\kappa b - \pi\rho)}. \quad (11)$$

В работах (1, 2) для широких волноводов ($kb \gg 1$) была введена дифракционная функция $U(s, p)$, с помощью которой целая функция

$$L(\sigma) = 1 - \exp \left[i \left(2\pi\rho - \frac{a}{k} \sigma^2 \right) \right] \quad (12)$$

разбивалась на сомножители, регулярные соответственно в верхней и нижней полуплоскостях $L(\sigma) = L_+(\sigma) \cdot L_-(\sigma)$, где

$$L_{\pm}(\sigma) = \exp\{U(s, p)\}, \quad s = (2b/k)^{1/2} \sigma. \quad (13)$$

Сравнивая (11) и (12) и учитывая, что при сделанных предположениях $\kappa \sim k - (\sigma^2/2k)$, легко заметить, что разбиение $K(\sigma)$ на множители можно провести так же, как $L(\sigma)$, если только выбирать s и p комплексными, обеспечив тождественность выражений (11) и (12).

4. Таким образом, задача об излучении из открытого конца волновода с тонкими прозрачными стенками сводится к аналогичной задаче (2, 3), если у дифракционной функции Вайнштейна считать аргумент комплексным. Мы здесь не выписываем конечных формул для поля излучения, так как они имеются в (1-7).

Естественно также, что при $Z \rightarrow 0$ все полученные результаты переходят в известные (1-3), а функция $U(s, p)$ — в функцию, табулированную в (2, 8). Для удобства расчетов нами составлены таблицы дифракционной

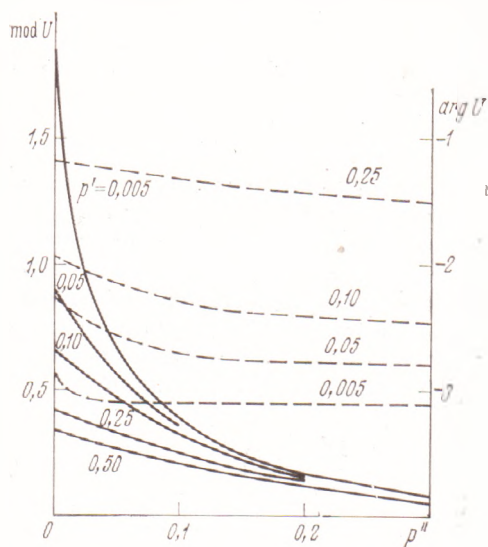


Рис. 3

ность Б. М. Болотовскому, Б. З. Каценеленбауму, В. И. Таланову и П. Я. Уфимцеву за внимание к работе и полезные замечания, высказанные при ее обсуждении.

Институт радиотехники и электроники
Академии наук СССР
Москва

Поступило
11 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, М., 1966.
- ² Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, М., 1953.
- ³ Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, М., 1966.
- ⁴ В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, М., 1970.
- ⁵ Е. И. Нефёдов, А. Т. Фиалковский, Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах, «Наука», 1972.
- ⁶ В. М. Бабич, В. С. Булдырев, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, «Наука», 1972.
- ⁷ П. Я. Уфимцев, Метод краевых волн в физической теории дифракции, М., 1962.
- ⁸ Е. И. Нефёдов, Пятизначные таблицы дифракционной $U(s, p)$ -функции Вайнштейна, «Наука», 1969.
- ⁹ Н. Н. Войтович, Е. И. Нефёдов, А. Т. Фиалковский, Пятизначные таблицы обобщенной дзета-функции Римана от комплексного аргумента, «Наука», 1970.
- ¹⁰ Е. П. Курюшин, Е. И. Нефёдов, Препринт № 31 (146) ИРЭ АН СССР, М., 1973.

функции Вайнштейна от комплексного аргумента (¹⁰). На рис. 3 показаны зависимости модуля (сплошные линии) и фазы (пунктирные линии) функции $U(s, p)$ от мнимых частей параметров s и p для $s' = s'' = 0,01$. Значения $p' = \text{const}$ указаны непосредственно на графиках.

Введение комплексного аргумента дифракционной функции Вайнштейна позволяет единым образом рассмотреть широкий класс электродинамических задач асимптотической теории дифракции электромагнитных (звуковых волн). При этом оказывается, что в ряде случаев можно воспользоваться известными результатами, расширив, таким образом, область их применения.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодар-