

УДК 517.948.35

МАТЕМАТИКА

И. Ю. ЛИННИК

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ М. КАЦА ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ ТЕПЛИЦЕВА ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 25 IV 1974)

Пусть $F(\lambda)$ — вещественная, ограниченная, абсолютно интегрируемая функция, $\lambda \in R^m$, $M = \text{ess sup} |F(\lambda)|$,

$$R(t) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{R^m} e^{-i(t, \lambda)} F(\lambda) d\lambda, \quad t \in R^m.$$

Пусть G — ограниченная конечно-связная область в R^m с 2-гладкой границей ∂G . Для $T \in (0, +\infty)$ рассмотрим область $G_T = \{TS\}_{S \in G}$. Пусть R_T — оператор с ядром $R(u-v)$ в $L^2(G_T)$, E — тождественный оператор, $h \in R^1$.

Символ $D_T(h)$ обозначим фредгольмов определитель оператора $E - hR_T$. Для $a \in R^1$ определим $a_+ = (a + |a|)/2$. Для $t \in R^m$ введем функцию

$$g(t) = \int_{\partial G} (t, n(\sigma))_+ d\sigma,$$

где $n(\sigma)$ — внешняя нормаль к ∂G в точке $\sigma \in \partial G$. Пусть выполнено условие

$$\int_{R^m} |t|^2 |R(t)|^2 dt < \infty.$$

Тогда для $m > 1$ при $T \rightarrow +\infty$ равномерно внутри интервала $|h| < M^{-1}$ имеет место следующее соотношение:

$$D_T(h) = \exp \left\{ T^m \frac{\text{mes}(G)}{(2\pi)^m} \int_{R^m} \ln(1 - hF(\lambda)) d\lambda + \right. \\ \left. + T^{m-1} \cdot \frac{1}{2} \int_{R^m} g(t) \left| \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{R^m} e^{-i(t, \lambda)} \ln(1 - hF(\lambda)) d\lambda \right|^2 dt + o(T^{m-1}) \right\}. \quad (1)$$

В случае $m=1$, $G=(0, 1)$ этот результат соответствует некоторому усилению теоремы М. Каца ⁽¹⁾. Как показал для этого случая Дж. Хиршман ^(2, 3), налагаемые здесь условия можно еще ослабить. В других терминах поведение $D_T(h)$ изучал Н. И. Ахиезер ⁽⁴⁾. Ниже приводится схема доказательства (1).

Лемма 1. Пусть $m=1$. Тогда равномерно внутри $|h| < M^{-1}$ при $T \rightarrow +\infty$

$$\ln D_T(h) - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 - hF(\lambda)) d\lambda \rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} c_n h^n,$$

где

$$c_n = \frac{2}{n} \text{Re} \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \int_{-\infty}^0 \dots \int_{-\infty}^0 R(t_1 - t_2) R(t_2 - t_3) \dots \right. \\ \left. \dots R(t_{k-1} - t_k) R(t_k - s) R^{*(n-k)}(s - t_1) dt_1 \dots dt_k \right\} ds,$$

где функции в $\{ \}$ абсолютно интегрируемы по s .

Сравнение леммы 1 с результатом Дж. Хиршмана ⁽²⁾ дает при $n=2, 3, \dots$ функциональные тождества, играющие ключевую роль в доказательстве.

Вернемся к $m > 1$. Для $|h| < M^{-1}$ имеем

$$\ln D_T(h) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^n}{n} \operatorname{sp} R_T^n.$$

Введем функции

$$\gamma_{T,k}(s) = \int_{G_T} \dots \int_{G_T} R(t_1 - t_2) R(t_2 - t_3) \dots R(t_k - s) R^{*n-k}(s - t_1) dt_1 \dots dt_k. \quad (2)$$

Тогда

$$\operatorname{sp} R_T^n = T^m \operatorname{mes}(G) R^{*n}(0) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{R^m \setminus G_T} \gamma_{T,k}(s) ds.$$

Пусть G_T^Δ — подмножество точек из R^m , удаленных от G менее, чем на Δ . Применив в (2) неравенство Шварца по t_1 , учитывая $\|R_T\| \leq M$, получим

$$\int_{R^m \setminus G_\Delta} |\gamma_{T,k}(s)| ds \leq T^{m-1} M^{n-2} \frac{\operatorname{mes}(G)}{\Delta^2} \left(\int_{R^m} |F(\lambda)| d\lambda \int_{|t| > \Delta/2} |t|^2 |R(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Выберем Δ столь малым, чтобы в $G_T^\Delta \setminus G_T$ можно было ввести координаты трубчатой окрестности $(r, T\sigma)$, где $r > 0$, $\sigma \in \partial G$. Сделав в (2) замену $\tau_i = t_i - \sigma T$, имея в R^m при $T \rightarrow +\infty$

$$\{G_T - \sigma T\} \rightarrow \{(\tau, n(\sigma)) < 0\}$$

и обосновывая предельные переходы рассуждениями типа (3), получим предельное соотношение типа (1) с некоторым выражением A для члена при T^{m-1} . Введем в R^m такой базис $N = \{n_1, \dots, n_m\}$, что $n_1 = n(\sigma)$. После введения функции

$$R_N(s) = R\left(\sum_{i=1}^m s^i n_i\right)$$

и применения к преобразованному соответственно выражению A теоремы о свертке преобразований Фурье, леммы 1, тождества Парсеваля получаем (1).

Соотношение (1) позволяет обобщить теоремы 1 и 2 работы ⁽⁵⁾ на гауссовские случайные поля.

Автор благодарен И. А. Ибрагимову за постоянный интерес к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
27 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Кас, Duke Math. J., v. 21, 501 (1954). ² I. I. Hirschman jr., J. Math. Mech., v. 16, 2, 167 (1966). ³ I. I. Hirschman jr., Arch. Rat. Mech. Anal., v. 38, 3, 189 (1970). ⁴ Н. И. Ахиезер, Укр. матем. журн., т. 16, 445 (1964). ⁵ И. Ю. Линник, Пробл. передачи информ., т. 8, 4, 55 (1972).