Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 1

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

В. В. КАТРАХОВ

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 22 II 1974)

В этой работе строятся фундаментальные решения уравнений с частными производными произвольного порядка и типа с коэффициентами, обращающимися в бесконечность на некоторой гиперплоскости. Кроме того доказывается разрешимость таких уравнений при правой части из некоторого пространства обобщенных функций. Отметим, что в одномерном случае фундаментальные решения для таких уравнений построены в ([5]).

1. Обозначим через $D_B(R^{n+1}_+)=D_B$ пространство бесконечно дифференцируемых, четных по последней переменной функций, с компактным носителем в полупространстве $R^{n+1}_+=\{x=(x_1,\ldots,x_{n+1}): -\infty<x_i<\infty,\ i=1,\ldots ,n,\ x_{n+1}>0\}$ эвклидова $(n+1)$-мерного пространства. Заметим, что носитель может прилегать к гиперплоскости $x_{n+1}=0$. Пространство D_B является подпространством обычного пространства основных функций (см., например, ([1])), последнее индуцирует в D_B естественную топологию. Через D_B' обозначим пространство линейных непрерывных функционалов над D_B. Через (f, φ), где $f\in D_B'$, $\varphi\in D_B$, будет обозначаться значение функционала f на элементе φ. Каждую обычную локально суммируемую с весом x^k_{n+1}, $k>0$, в R^{n+1}_+ функцию $f(x)$ мы будем отождествлять с функционалом $f\in D_B'$, действующим по формуле

$$(f, \varphi)=\int\limits_{R^{n+1}_+} f(x)\varphi(x)x^k_{n+1}dx.$$

В D_B' естественным образом вводятся линейные операции и операция умножение на четную по последней переменной бесконечно дифференцируемую функцию. Пусть $B_{x_{n+1}}=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2_{n+1}}+\dfrac{k}{x_{n+1}}\dfrac{\partial}{\partial x_{n+1}}$ — оператор Бесселя; введем в D_B' операцию дифференцирования по формуле

$$(D^{\alpha'}_{x'}B^{\alpha_{n+1}}_{x_{n+1}}f, \varphi)=(-1)^{|\alpha'|}(f, D^{\alpha'}_{x'}B^{\alpha_{n+1}}_{x_{n+1}}\varphi).$$

В пространстве D_B определим преобразование Фурье — Бесселя формулой

$$(F_B\varphi)(\xi)=\int\limits_{R^{n+1}_+} e^{-i(x',\xi')}j_{(k-1)/2}(x_{n+1}\xi_{n+1})\varphi(x)x^k_{n+1}dx,$$

где $j_\nu(z)$ — функция Бесселя (см. ([2])).

Следующая теорема была получена в ([4]). Мы приводим другое доказательство, характерное тем, что наш метод применим также к получению других оценок преобразования Фурье — Бесселя от аналитических функций.

Теорема 1. *Функция $\psi(\xi)$ является преобразованием Фурье — Бесселя функции из D_B тогда и только тогда, когда ψ аналитична по каждой из переменных во всей комплексной плоскости, четна по последней пере-*

менной и удовлетворяет оценке

$$|z_1^{\alpha_1}\dots z_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\psi(z_1,\dots,z_{n+1})|\leqslant C_\alpha \exp\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j|\operatorname{Im} z_j|\right),$$

где C_α и a_j — некоторые положительные постоянные, зависящие от функции ψ, но не зависящие от переменных $z_1,\dots,z_{n+1}$.

Доказательство. Положим $\nu=(k-1)/2$. Пусть сначала $\nu=-{}^1/_2$. В этом случае $j_\nu(z)=c_\nu\cos z$ и наша теорема совпадает с обычной теоремой Пэли — Винера. Пусть теперь $|\nu|<{}^1/_2$. Тогда из формулы Меллера — Сонина ([3]) следует, что

$$x^{2\nu}j_\nu(x)=c_\nu[j_\nu^1(x)-j_\nu^1(-x)],$$

где

$$j_\nu^1(x)=e^{ix}\int_0^\infty (t^2+2t)^{-\nu-1/2}e^{ixt}\,dt,\qquad -\infty<x<\infty.$$

Легко показать, что $j_\nu^1(x)$ допускает аналитическое продолжение с вещественной оси в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости и что ее продолжение экспоненциально убывает там. Теперь для оценки интеграла

$$(F_B^{-1}\psi)(x)=C_\nu\int_{R_+^{n+1}}\psi(\xi)\,e^{i(x',\xi')}\,j_\nu(x_{n+1}\xi_{n+1})\,\xi_{n+1}^{2\nu+1}d\xi$$

нужно воспользоваться теоремой Коши и оценкой функций $\psi(\xi)$ и $j_\nu^1(x_{n+1}\xi_{n+1})$.

В общем случае ($\nu>-{}^1/_2$) доказательство теоремы сводится с помощью формулы (3.1.8) работы ([2]) к уже рассмотренному случаю.

Введем пространство Z_B как подпространство пространства Z (см. ([1])), состоящее из четных по последней переменной функций, и через Z_B' обозначим пространство линейных непрерывных функционалов над Z_B.

Преобразование Фурье — Бесселя функционала $f\in D_B'$ определим формулой $(F_Bf,\psi)=(f,F_B^{-1}\psi)$, где $\psi\in Z_B$. Имеют место формулы

$$P(\partial/\partial\xi_1,\dots,\partial/\partial\xi_n,B_{\xi_{n+1}})F_Bf=F_B[P(-ix_1,\dots,-ix_n,-x_{n+1}^2)f],$$

$$F_B[P(\partial/\partial x_1,\dots,\partial/\partial x_n,B_{x_{n+1}})f]=P(i\xi_1,\dots,i\xi_n,-\xi_{n+1}^2)F_Bf,$$

где P — произвольный многочлен с постоянными коэффициентами.

Назовем сверткой функций $f,g\in D_B$ функцию

$$(f\circledast g)(y)=\int_{R_+^{n+1}}f(x)\,T_x^yg(x)\,x_{n+1}^kdx,$$

где T_x^y — оператор обобщенного сдвига (см. ([6])).

Для функционала $g\in D_B'$ функция $(g\circledast\varphi)(\xi)=(g(x),T_x^{-\xi}\varphi(x))$ называется сверткой функционала g и основной функции $\varphi\in D_B$.

Для функционалов $f,g\in D_B'$ функционал, действующий по формуле $(f\circledast g,\varphi)=(f(\xi),g\circledast\varphi(\xi))$, называется сверткой функционалов f и g.

Ясно, что свертка существует не всегда, но имеет место

Лемма 1. *Если f или g — финитный функционал, то существуют свертки $f\circledast g$ и $g\circledast f$ и $f\circledast g=g\circledast f$.*

В этом случае

$$D_{x'}^{\alpha'}B_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}(f\circledast g)=(D_{x'}^{\alpha'}B_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}f)\circledast g=f\circledast D_{x'}^{\alpha'}B_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}g.$$

Лемма 2. *Если $f_m, f \in D_B'$, $m=1, 2, \ldots$, и $f_m \to f$ в D_B', то $f_m \circledast g \to f \circledast g$, когда f финитна или f_m финитны и сосредоточены в одном и том же ограниченном множестве в R_+^{n+1}. Соответствующие носители могут прилегать к гиперплоскости $x_{n+1}=0$.*

2. Определим обобщенную функцию Дирака δ_B по формуле

$$(\delta_B, \varphi)=\varphi(0).$$

Фундаментальным решением оператора $P(D_{x'}, B_{x_{n+1}})$, где P — многочлен с постоянными коэффициентами, назовем функцию $\mathscr{E} \in D_B'$, удовлетворяющую уравнению (в смысле D_B')

$$P(D_{x'}, B_{x_{n+1}})\mathscr{E}=\delta_B. \tag{1}$$

Следующая теорема обобщает некоторые результаты [6].

Теорема 2. *Пусть k не равно нечетному числу.*

Тогда для каждого оператора $P(D_{x'}, B_{x_{n+1}})$ существует фундаментальное решение.

Решение уравнения (1) сводится к решению следующего уравнения в Z_B':

$$P(i\sigma', -\sigma_{n+1}^2)E(\sigma)=1,$$

где $E=F_B\mathscr{E}$ и $1=F_B\delta_B$.

Дальнейшее доказательство теоремы проводится с помощью «лестницы Хёрмандера» (см., например, [7]).

Рассмотрим теперь вопрос о существовании решения уравнения

$$P(D_{x'}, B_{x_{n+1}})u=f, \quad f \in D_B'. \tag{2}$$

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 3. *Для каждой обобщенной функции f и каждой ограниченной области $\Omega \subset R_+^{n+1}$ можно указать число N такое, что для любой $\varphi \in D_B$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$, имеет место неравенство*

$$|(f, \varphi)| \leqslant C_N \sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1} \leqslant N} \max_{x \in \Omega} |D_{x'}^{\alpha'} B_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}} \varphi(x)|.$$

Область Ω может прилегать к гиперплоскости $x_{n+1}=0$.

Пусть H_k^l — пространство, изученное И. А. Киприяновым [2]. С помощью теоремы вложения для этих пространств [8] доказывается

Лемма 4. *Для всякой обобщенной функции f и всякой ограниченной области можно найти такое число N, что для некоторых локально суммируемых с весом x_{n+1}^k функций g_α, сосредоточенных в этой области, имеет место равенство*

$$f=\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1} \leqslant N} D_{x'}^{\alpha'} B_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}} g_\alpha(x).$$

С помощью леммы 4 доказывается

Лемма 5. *Если $f \in D_B'$ и финитна, то*

$$F_B f(z_1, \ldots, z_{n+1})=g_1(z_1, \ldots, z_{n+1})+g_2(z_1, \ldots, z_{n+1}),$$

где g_1 и g_2 аналитичны во всем комплексном пространстве размерности $n+1$ за исключением множества $\{z_{n+1}=0\}$, и если $\operatorname{supp} f \subset \{x \in R^{n+1}: 0 \leqslant a_j \leqslant x_j \leqslant b_j, j=1, \ldots, n+1\}$, то

$$|g_1(\sigma_1+i\tau_1, \ldots, \sigma_{n+1}+i\tau_{n+1})| \leqslant C(1+|\sigma+i\tau|)^N \exp\left(-\sum_1^{N+1} a_j\tau_j\right),$$

$$\tau_j>0, \quad j=1, \ldots, n+1,$$

$$|g_2(\sigma_1+i\tau_1,\ldots,\sigma_{n+1}+i\tau_{n+1})|\leqslant C(1+|\sigma+i\tau|)^N \exp\left(-\sum_1 a_j\tau_j+a_{n+1}\tau_{n+1}\right),$$

$$\tau_j>0,\quad j=1,\ldots,n,\quad \tau_{n+1}<0.$$

Наконец, имеет место

Теорема 3. *Если k не равно нечетному числу, то уравнение (2) разрешимо в D_B' при любой правой части $f\in D_B'$.*

Замечание. Если f финитна, то можно положить

$$u=\mathscr{E}\circledast f.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. А. Киприянову за руководство работой.

Воронежский государственный университет им. Ленинского комсомола

Поступило 21 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов,* Обобщенные функции и действия над ними, М., 1958. [2] *И. А. Киприянов,* Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 89, (2) (1967). [3] *Г. Бейтман, А. Эрдейи,* Высшие трансцендентные функции, т. 2, М., 1966. [4] *Н. И. Ахиезер,* Сообщ. Харьковск. матем. общ., т. 25 (1957). [5] *A. H. Zemanian,* SIAM J. Appl. Math., v. 15, № 4 (1967). [6] *И. А. Киприянов, В. И. Кононенко,* Дифференциальные уравнения, т. 1 (1967). [7] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов,* Пространство основных и обобщенных функций, М., 1958. [8] *В. В. Катрахов,* ДАН, т. 207, № 2 (1972).